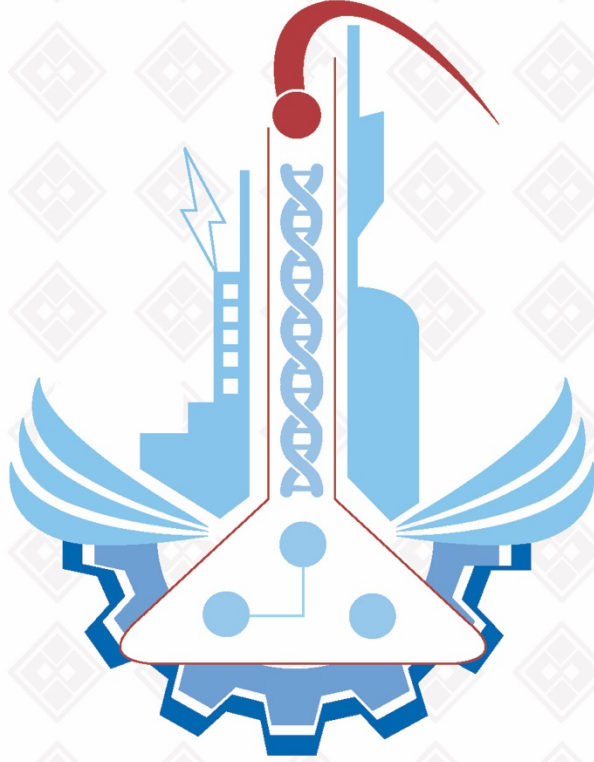


ISSN: 1308-9064

Cilt: 36 / Sayı: 1 / Yıl: 2024

FIRAT ÜNİVERSİTESİ FEN BİLİMLERİ DERGİSİ



F ı r a t Ü n i v e r s i t e s i
Fen Bilimleri Dergisi (FBD)
Cilt:36, Sayı:1, Yıl:2024
ISSN: 1308 - 9064

İ l e t i Ő i m

Fırat Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
23119, ELAZIĞ

Tel: 0 424 212 27 07
Faks: 0 424 236 99 55
e-posta: fenbilim@firat.edu.tr

Bu dergi yılda 2 kez ve hakemli olarak yayımlanır.

Derginin Eski Adı: Fırat Üniversitesi Fen ve Mühendislik Bilimleri Dergisi
Derginin Eski ISSN Numarası: 1300-2708

<http://dergipark.gov.tr/fufbd>

Fırat Üniversitesi
Fen Bilimleri Dergisi (FBD)

Sahibi

Prof. Dr. Fahrettin GÖKTAŞ
Fırat Üniversitesi Rektörü

Genel Yayın Yönetmeni

Prof. Dr. Burhan ERGEN
F.Ü. Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürü

Baş Editör

Doç. Dr. Ferhat Uçar
F.Ü. Fen Bilimleri Enstitüsü Müdür Yrd.

Editör

Prof. Dr. Emrah YILMAZ
F.Ü. Fen Bilimleri Enstitüsü Müdür Yrd.

DANIŞMA KURULU

Leyla AÇIK	Gazi Ü., Biyoteknoloji	Turgay SEÇKİN	İnönü Ü., Kimya
Haluk KORALAY	Gazi Ü., Fizik	İbrahim KARATAŞ	Selçuk Ü., Kimya
Mahmut ELP	Kastamonu Ü., Su Ürünleri	Zihni DEMİRBAĞ	K.T.Ü., Biyoloji
Yusuf AYVAZ	S.Demirel Ü., Biyoloji.	Seyfettin ÇAKMAK	S.Demirel Ü., Fizik
Mikail ET	Fırat Ü., Matematik	Orhan ERMAN	Fırat Ü., Biyoloji
Hikmet GEÇKİL	İnönü Ü., Biyoloji	Ömer AKIN	T.O.B.B. Matematik
Kenan GÜLLÜ	Muğla S.K.Ü. Su Ürünleri	Sinan AKPINAR	Fırat Ü., Fizik
Mehmet KAYA	Fırat Ü., Kimya	Ahmet ŞAHİN	Erciyes Ü., Biyoloji
İlhami KIZIROĞLU	Hacettepe Ü., Biyoloji	Kadir DEMİRELLİ	Fırat Ü., Kimya
S.Güneş KÜRKÇÜOĞLU	Osmangazi Ü.,Fizik	Kenan GÜLLÜ	Muğla Ü., Su Ürünleri
Dursun ŞEN	Fırat Ü., Su Ürünleri	Vedat ASİL	Fırat Ü., Matematik
Serdar SALMAN	Marmara Ü. Metal. Müh.	Ertan GOKALP	K.T.Ü. Harita. Müh.
İzzet KARA	Pamukkale Ü., Fizik	Ekrem ARTUNÇ	S.Demirel Ü., Fizik

Fırat Üniversitesi Fen Bilimleri Dergisi (FBD)
36-1, 2024

İÇİNDEKİLER / CONTENTS

- 1. Solutions of Proportional Learning and Forgetting Models by Proportional Laplace Transform on Time Scales**
Zaman Skalasında Oransal Öğrenme ve Unutma Modellerinin Oransal Laplace Dönüştürümü ile Çözümleri
Ayşe Çiğdem YAR, Emrah YILMAZ 1-10
- 2. Ultrases Dalgasının Cevher Hazırlama ve Zenginleştirme İşlemlerinde Uygulamaları**
Applications of Ultrasound Wave in Mineral Preparation and Processing
Kiraz EŞMELİ 11-24
- 3. Thermokinetic and Structural Shape Memory Effect Characteristics of Novel Quaternary CuAlNiCr HTSMA**
Termodinamik ve Yapısal Şekil Hafıza Etkisinin Dörtlü CuAlNiCr YSSHA Karakteristikleri
Oktay KARADUMAN, İskender ÖZKUL, Gökhan İSTEK, Canan Aksu CANBAY 25-34
- 4. Investigating Solutions of the Noyes-Whitney Dynamic Equation via Proportional Fractional Derivative**
Noyes-Whitney Dinamik Denklemine Çözümlerinin Oransal Kesirli Türeve Göre İncelenmesi
Tuba GULSEN, Melek DÖNMEZ 35-41

Solutions of Proportional Learning and Forgetting Models by Proportional Laplace Transform on Time Scales

Ayşe Çiğdem YAR¹, Emrah YILMAZ^{2*}

^{1,2}Department of Mathematics, Faculty of Science, Fırat University, Elazığ, Türkiye
¹ ayseyar23@gmail.com, ^{2*} emrah231983@gmail.com

(Geliş/Received: 21/01/2024;

Kabul/Accepted: 22/03/2024)

Abstract: Knowledge is acquired as a result of some activities but is forgotten over time. Much work has been done on this subject in fields such as mathematics, engineering and psychology. There are many learning and forgetting models in literature. In this study, a learning and forgetting model considered in classical analysis is redefined with the help of proportional derivative on time scales. The cases where the learning and forgetting rates are constant and the *Araştırma Makalesi Araştırma Makalesi* learning function shows exponential and hyperbolic functions properties are analyzed. These models are solved with the help of the proportional Laplace transform. Finally, the models considered with the general solution method of first-order proportional dynamic equations were examined on the time scale.

Key words: Proportional derivative, proportional Laplace transform, time scale, learning and forgetting model.

Zaman Skalasında Oransal Öğrenme ve Unutma Modellerinin Oransal Laplace Dönüşümü ile Çözümleri

Öz: Bilgi, bazı faaliyetler sonucunda kazanılır ancak zamanla unutulur. Matematik, mühendislik ve psikoloji gibi alanlarda bu konu üzerine pek çok çalışma yapılmıştır. Literatürde pek çok öğrenme ve unutma modeli bulunmaktadır. Bu çalışmada, klasik analizde ele alınan bir öğrenme ve unutma modeli, zaman skalasında oransal türev yardımıyla yeniden tanımlanmıştır. Öğrenme ve unutma oranlarının sabit olduğu ve öğrenme fonksiyonunun üstel ve hiperbolik fonksiyon özellikleri gösterdiği durumlar analiz edilmiştir. Bu modeller oransal Laplace dönüşümü yardımıyla çözülmektedir. Son olarak birinci mertebeden oransal dinamik denklemlerin genel çözüm yöntemi ile ele alınan modeller zaman skalasında incelenmiştir.

Anahtar kelimeler: Oransal türev, oransal Laplace dönüşümü, zaman skalası, öğrenme ve unutma modeli.

1. Introduction

Fractional calculus began to be studied shortly after the emergence of classical calculus. Fractional calculus is deeply related to the dynamics of complex problems. Many mathematical models can be expressed and solved by fractional order differential equations [1]. The fundamental theory of fractional calculus was developed by Grünwald, Letnikov, Liouville and Riemann [2]. There are many types of fractional derivatives. Riemann-Liouville, Caputo, Liouville-Grünwald, Marchaud, Hilfer, Conformable, and Proportional are a few of them. Today, fractional calculus has been applied and solved in many mathematical fields such as engineering, biology, physics, psychology, mechanics and economics [3-8]. Time scale theory, which is one of the important fields of study, is preferred in many fields of study. One of these areas is fractional calculus. The idea of developing fractional calculus on time scales originated with Ph.D. thesis of Bastos [9-10]. Now let us give the necessary information about time scale calculus.

A time scale \mathbb{T} is an arbitrary, non-empty, closed subset of \mathbb{R} . It was introduced by Hilger to unify continuous and discrete problems into a single theory [11]. In the following years, many important results have been obtained on this theory. It's basic concepts can be found in [12] and [13]. For an arbitrary time scale \mathbb{T} , following information can be given [12]. $\sigma: \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{T}$ is forward jump operator described by

$$\sigma(t) = \inf\{s \in \mathbb{T}, s > t\},$$

for $t \in \mathbb{T}$. And, $\mu: \mathbb{T} \rightarrow [0, \infty)$ is graininess function as

$$\mu(t) = \sigma(t) - t.$$

We also need a set \mathbb{T}^κ , which is reproduced from \mathbb{T} as follows: $\mathbb{T}^\kappa = \mathbb{T} - \{m\}$, provided that \mathbb{T} has a left-scattered maximum m . In other cases, $\mathbb{T}^\kappa = \mathbb{T}$. Suppose $f: \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$ and $t \in \mathbb{T}^\kappa$. Then, one can define $f^\Delta(t)$ to be a number (if it exists) with the property that given any $\varepsilon > 0$, there is a neighborhood U of t such that

* Corresponding Author: emrah231983@gmail.com. ORCID Numbers of Authors: ¹ 0000-0002-2310-4692, ² 0000-0002-7822-9193

$$|[f(\sigma(t)) - f(s)] - f^\Delta(t)[\sigma(t) - s]| \leq \varepsilon|\sigma(t) - s|,$$

for $\forall s \in U$. $f^\Delta(t)$ is Δ - derivative of f at t . On the other hand, there exists a function F that is pre-differentiable with a region of differentiation D and f is regulated. Then, indefinite delta integral of f is

$$\int f(t)\Delta t = F(t) + C,$$

where f and F satisfy $F^\Delta(t) = f(t)$ for $\forall t \in D$ and $C \in \mathbb{R}$. By the same reasoning, Cauchy integral of f on $[r, s]$ is

$$\int_r^s f(t)\Delta t = F(s) - F(r),$$

for $r, s \in \mathbb{T}$. Let $a, b \in \mathbb{T}$ and $f \in C_{rd}$ where C_{rd} is set of all rd-continuous functions on \mathbb{T} . Moreover,

$$\begin{aligned} \text{I.} \quad & \text{If } [a, b] \text{ includes only isolated points, then} \\ \int_a^b f(t)\Delta t &= \begin{cases} \sum_{t \in [a, b)} \mu(t)f(t), & \text{if } a < b \\ 0, & \text{if } a = b. \\ -\sum_{t \in [b, a)} \mu(t)f(t), & \text{if } a > b \end{cases} \\ \text{II.} \quad & \text{If } \mathbb{T} = \mathbb{Z}, \text{ then} \\ \int_a^b f(t)\Delta t &= \begin{cases} \sum_{t=a}^{b-1} f(t), & \text{if } a < b \\ 0, & \text{if } a = b. \\ -\sum_{t=b}^{a-1} f(t), & \text{if } a > b \end{cases} \end{aligned}$$

Now let us mention about proportional derivative, which is a variant of fractional derivative preferred in this study. The advantage of the proportional derivative over other fractional derivatives is that proportional fractional integrals have the semigroup property and provide a generalization to derivatives and integrals in classical analysis [14]. Moreover, in the proportional derivative, the fact that D^0 satisfies the identity operator ($D^0 f(t) = f(t)$) and D^1 satisfies delta derivative operator ($D^1 f(t) = f^\Delta(t)$) on time scale \mathbb{T} shows that it is conformable with the classical operator. Here, proportional derivative D^α is order $\alpha \in [0, 1]$ [15-16]. The basic definitions and theorems for proportional derivative used in this study are given in the next section.

Many dynamic processes occurring in real life can be modelled by some ordinary or partial differential equations. As a result of taking the orders of these models outside the natural number, the theory of fractional differential equations emerges [17]. Some studies on this subject are in the related references [18-25].

One of the methods used in the solution of mathematical models is Laplace transform. There are various studies on this subject. The application of Laplace transform to fractional systems is given in [14]. Akgül et al. solved the proportional Caputo derivative by Laplace transform [26]. Also, Anderson and Georgiev defined the proportional Laplace transform on \mathbb{T} , which forms the basis of this work [16]. Detailed information about the proportional Laplace transform will be given in the next section.

In this study, we reconstruct some versions of classical learning and forgetting model of Edelman-Keshet [27] using proportional derivatives. Let us now explain the learning and forgetting model in classical case. One of the fields of study between mathematics and psychology is cognitive science and memory research. The learning and forgetting model on \mathbb{T} that we discuss in this study is an example of this research [28-29]. This model expresses the change in memory power as a function of time in a mathematical way. The classical case of the learning and forgetting model is as follows [27]:

$$\frac{dy}{dt} = S - fy(t), \tag{1}$$

where $y(t)$ is the amount of information a person has at time t (in years), $f \geq 0$ is rate of forgetting and $S \geq 0$ is rate of learning. The degree of learning requires a subjective interpretation of the material learnt. It is therefore different for each individual. Knowledge with a better learning degree is more retained in the future compared to less learnt knowledge. The act of forgetting provides an adaptation to environmental realities [30-32]. In this paper, the classical model (1) is redefined with the help of the proportional derivative. We analysed the following models obtained by taking the learning rates as a constant, a proportional exponential function and a proportional hyperbolic function with the forgetting rate fixed. In this study, we choose S in different forms as Q , $E_Q(t, 0)$, $Cosh_Q(t, 0)$ and $E_Q(t, 0) + Cosh_Q(t, 0)$, respectively where f and Q are fixed functions and $\pm Q \in \mathfrak{R}_c$. Let $\alpha \in$

[0,1]. Here, following different versions of the proportional learning-forgetting models on time scales will be solved.

$$\begin{aligned} D^\alpha y(t) &= Q - fy(t), \\ D^\alpha y(t) &= E_Q(t, 0) - fy(t), \\ D^\alpha y(t) &= Cosh_Q(t, 0) - fy(t), \\ D^\alpha y(t) &= E_Q(t, 0) + Cosh_Q(t, 0) - fy(t). \end{aligned}$$

The most important difference of the study is the difficulties that the Laplace transform and time scale theory will create in the proportional derivative.

2. Preliminaries

Here, important concepts and theorems related to proportional derivative on \mathbb{T} , which form the basis of the study are given. Let \mathbb{T} be a time scale with forward jump operator σ and delta differentiation operator Δ . Also, let $\alpha \in [0,1]$. Throughout this study, we suppose the below property (A1) holds.

(A1) $k_0, k_1: [0,1] \times \mathbb{T} \rightarrow [0, \infty)$ are continuous functions such that
 $\lim_{x \rightarrow 0^+} k_1(\alpha, t) = 1, \lim_{x \rightarrow 1^-} k_1(\alpha, t) = 0,$
 $\lim_{x \rightarrow 0^+} k_0(\alpha, t) = 0, \lim_{x \rightarrow 1^-} k_0(\alpha, t) = 1,$
 $k_1(\alpha, t) \neq 0, k_0(\alpha, t) \neq 0,$
 where $t \in \mathbb{T}$ and $\alpha \in [0,1]$ [16].

Definition 2.1. [16] Let f be Δ – differentiable at $t \in \mathbb{T}^\kappa$. Proportional Δ –derivative of f at t is
 $D^\alpha f(t) = k_1(\alpha, t)f(t) + k_0(\alpha, t)f^\Delta(t), \alpha \in [0, 1].$

This equation shows the relationship between proportional derivative on \mathbb{T} and the delta derivative on \mathbb{T} .

Definition 2.2. [16] $f: \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$ is proportional regressive if

$$k_0(\alpha, t) - \mu(t)k_1(\alpha, t) \neq 0,$$

and

$$k_0(\alpha, t) - \mu(t)(f(t) - k_1(\alpha, t)) \neq 0,$$

for any $\alpha \in (0,1]$ and $t \in \mathbb{T}$. The set of all proportional regressive functions on \mathbb{T} is denoted by \mathfrak{R}_c .

Definition 2.3. [16] Suppose that $\alpha \in (0, 1], p \in \mathfrak{R}_c$. For $t, t_0 \in \mathbb{T}$, proportional exponential function is as follows

$$E_p(t, t_0) = e_{\frac{p-k_1}{k_0}}(t, t_0),$$

where $e_{\frac{p-k_1}{k_0}}(t, t_0)$ is exponential function on \mathbb{T} . Proportional exponential function is calculated using exponential function structure on \mathbb{T} .

Remark 2.4. [12] If $p \in \mathcal{R}$, where \mathcal{R} is the set of all rd-continuous, regressive functions on \mathbb{T} , then exponential function on \mathbb{T} is defined by

$$e_p(t, s) = \exp\left(\int_s^t \xi_{\mu(\tau)}(p(\tau))\Delta\tau\right), \quad s, t \in \mathbb{T}.$$

Definition 2.5. [16] Let $\pm f \in \mathfrak{R}_c$. Proportional hyperbolic functions $Cosh_f$ and $Sinh_f$ are defined by

$$Cosh_f = \frac{E_f + E_{-f}}{2},$$

and

$$Sinh_f = \frac{E_f - E_{-f}}{2}.$$

Definition 2.6. [16] Let $\alpha \in (0, 1]$, and fix $t \in \mathbb{T}$. For $h > 0$, multi-valued proportional cylinder transformation $\zeta_h^c: \mathbb{C}_h^c \rightarrow \mathbb{C}$ is

$$\zeta_h^c(z) = \begin{cases} \frac{1}{h} \log \left(1 + h \left(\frac{z - k_1(\alpha, t)}{k_0(\alpha, t)} \right) \right) & \text{for } h \neq 0 \\ \frac{z - k_1(\alpha, t)}{k_0(\alpha, t)} & \text{for } h = 0, \end{cases}$$

where \mathbb{C}_h^c is given by

$$\mathbb{C}_h^c = \left\{ z \in \mathbb{C} : z \neq k_1(\alpha, t) - \frac{k_0(\alpha, t)}{h} \right\},$$

and \log is the multi-valued complex logarithm function.

Definition 2.7. [16] Let $f \in \mathcal{C}_{rd}(\mathbb{T})$ where $\mathcal{C}_{rd}(\mathbb{T})$ is set of all rd-continuous functions on \mathbb{T} and $k_0(\alpha, t) - \mu(t)k_1(\alpha, t) \neq 0$. Proportional antiderivative of f is

$$\int D^\alpha f(t) \Delta_\alpha t = f(t) + cE_0(t, t_0), \quad c \in \mathbb{R}, \quad t \in \mathbb{T},$$

and, proportional Δ – integral of f on $[a, b]$ is

$$\int_a^t f(s) \Delta_{\alpha, t} s, \quad t \in [a, b],$$

where $\Delta_{\alpha, t} s = \frac{E_0(t, \sigma(s))}{k_0(\alpha, s)} \Delta s$. Here, proportional integral is calculated by reducing it to delta integral on \mathbb{T} .

Remark 2.8. [16] Let $\alpha \in (0, 1]$, k_0 and k_1 satisfy (A1), $k_0 \in \mathcal{C}_{rd}^1(\mathbb{T})$ where $\mathcal{C}_{rd}^1(\mathbb{T})$ is the set of delta differentiable functions whose delta derivatives are rd-continuous and $|E_0(\infty, 0)| < \infty$. Let $h \in \mathcal{C}_{rd}^1(\mathbb{T})$ and $g \in \mathfrak{R}_c$ be such that

$$zh^\sigma E_g^\sigma(\cdot, 0) = -gE_g(\cdot, 0), \tag{2}$$

$$\begin{aligned} D^\alpha h - zh h^\sigma + (z - k_1)h^\sigma - k_1 h &= 0, \\ h(0) &= 1, \end{aligned}$$

for $z \in \mathcal{H}_c(h)$, where $\mathcal{H}_c(h)$ consists of all complex numbers $z \in \mathfrak{R}_c$ for which $z - k_1 \in \mathfrak{R}_c$ and

$$k_0 + h^\sigma z(\mu - k_1) \neq 0.$$

Note that there exists a unique $h \in \mathcal{C}_{rd}^1$ that satisfies the second and third equations of the system (2). Hence, there exists a unique $g \in \mathfrak{R}_c$ that satisfies the first equation of (2).

Definition 2.9. [16] Let $f: \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{C}$ be regulated. Then, proportional Laplace transform of f is defined by

$$\mathcal{L}_c(f)(z) = \int_0^\infty f(t) h^\sigma(t) E_g^\sigma(t, 0) \Delta_{\alpha, \infty} t,$$

for $z \in \mathcal{D}_c(f)$, where $\mathcal{D}_c(f)$ consists of all complex number $z \in \mathcal{H}_c(h)$ when the proportional improper integral exists. Here, \mathcal{L}_c^{-1} is called proportional inverse Laplace transform which satisfies the property $\mathcal{L}_c^{-1}(\mathcal{L}_c(f))(z) = f(\cdot, 0)$ with $\mathcal{L}_c(f(\cdot, 0))(z) = F(z)$.

Remark 2.10. [12] $f: \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$ is regulated if its right-sided limits exist (finite) at all right-dense points in \mathbb{T} and its left-sided limits exist (finite) at all left-dense points in \mathbb{T} .

Theorem 2.11. [16] Let $f, g: \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{C}$ be regulated functions and $a, b \in \mathbb{C}$. Then,

$$\mathcal{L}_c(af + bg)(z) = a\mathcal{L}_c(f)(z) + b\mathcal{L}_c(g)(z),$$

for $z \in \mathcal{D}_c(f) \cap \mathcal{D}_c(g)$.

Here, it will be explained how the Laplace transform of proportional derivative is calculated, which will form the basis of the study.

Theorem 2.12. [16] Let $n \in \mathbb{N}$, $f: \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{C}$ be such that $(D^\alpha)^k f$, $k \in \{0, 1, \dots, n\}$, are regulated. Then

$$\mathcal{L}_c((D^\alpha)^n f)(z) = z^n \mathcal{L}_c(f)(z) - E_0(\infty, 0)(f(0)z^{n-1} + D^\alpha f(0)z^{n-2} + \dots + (D^\alpha)^{n-1}f(0))$$

for any

$$z \in \mathfrak{D}_c(f) \cap \mathfrak{D}_c(D^\alpha(f)) \cap \dots \cap \mathfrak{D}_c((D^\alpha)^n(f)),$$

where

$$\lim_{t \rightarrow \infty} ((D^\alpha)^k f(t)h(t)E_g(t, 0)) = 0, \quad k \in \{0, 1, \dots, n\}.$$

Theorem 2.13. [16] The proportional Laplace transforms of some common functions are as follows.

- i. $\mathcal{L}_c(1)(z) = \frac{1}{z} E_0(\infty, 0), \quad z \in \mathfrak{D}_c(1).$
- ii. $\mathcal{L}_c(E_f(\cdot, 0))(z) = \frac{E_0(\infty, 0)}{z-f}, \quad f \in \mathfrak{R}_c$ and for those $z \in \mathfrak{D}_c(E_f(\cdot, 0))$ where $\lim_{t \rightarrow \infty} (E_f(t, 0)h(t)E_g(t, 0)) = 0.$
- iii. $\mathcal{L}_c(\text{Cosh}_f(\cdot, 0))(z) = \frac{zE_0(\infty, 0)}{z^2-f^2}, \quad f \in \mathfrak{R}_c$ and for those $z \in \mathfrak{D}_c(E_f(\cdot, 0) \cap E_{-f}(\cdot, 0))$ where $\lim_{t \rightarrow \infty} (E_f(t, 0)h(t)E_g(t, 0)) = \lim_{t \rightarrow \infty} (E_{-f}(t, 0)h(t)E_g(t, 0)) = 0.$

Now let's calculate the Laplace transform of the proportional sin-function.

Theorem 2.14. Let $f \in \mathfrak{R}_c$ be a constant. Then, $\mathcal{L}_c(\text{Sinh}_f(\cdot, 0))(z) = \frac{fE_0(\infty, 0)}{z^2-f^2}.$

Proof. By the definition of Sinh_f , we have

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_c(\text{Sinh}_f(\cdot, 0))(z) &= \mathcal{L}_c\left(\frac{E_f(\cdot, 0) - E_{-f}(\cdot, 0)}{2}\right)(z) \\ &= \frac{1}{2} \mathcal{L}_c(E_f(\cdot, 0))(z) - \frac{1}{2} \mathcal{L}_c(E_{-f}(\cdot, 0))(z) \\ &= \frac{E_0(\infty, 0)}{2(z-f)} - \frac{E_0(\infty, 0)}{2(z+f)} \\ &= \frac{fE_0(\infty, 0)}{z^2-f^2}, \end{aligned}$$

for those $z \in \mathfrak{D}_c(E_f(\cdot, 0) \cap E_{-f}(\cdot, 0))$ where $\lim_{t \rightarrow \infty} (E_f(t, 0)h(t)E_g(t, 0)) = \lim_{t \rightarrow \infty} (E_{-f}(t, 0)h(t)E_g(t, 0)) = 0.$

Proportional Laplace transform is applied to proportional IVP's as follows.

Theorem 2.15. [16] Consider the following proportional IVP

$$(D^\alpha)^n y + a_{n-1}(D^\alpha)^{n-1}y + \dots + a_1 D^\alpha y + a_0 y = f(t), \quad t > 0, \quad (3)$$

$$\begin{aligned} (D^\alpha)^{n-1}y(0) &= b_{n-1}, \\ &\vdots \end{aligned} \quad (4)$$

$$D^\alpha y(0) = b_1,$$

$$y(0) = b_0,$$

where $a_i, b_i \in \mathbb{C}, i \in \{1, \dots, n-1\}, f: \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{C}$ is regulated. Apply proportional Laplace transform to both sides of (3) and use initial conditions (4), we get

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_c(f)(z) &= \mathcal{L}_c((D^\alpha)^n y + a_{n-1}(D^\alpha)^{n-1}y + \dots + a_1 D^\alpha y + a_0 y)(z) \\ &= \mathcal{L}_c((D^\alpha)^n y)(z) + a_{n-1} \mathcal{L}_c((D^\alpha)^{n-1}y)(z) + \dots + a_1 \mathcal{L}_c(D^\alpha y)(z) + a_0 \mathcal{L}_c(y)(z) \\ &= z^n \mathcal{L}_c(y)(z) - E_0(\infty, 0)(y(0)z^{n-1} + D^\alpha y(0)z^{n-2} + \dots + (D^\alpha)^{n-1}y(0)) \\ &\quad + a_{n-1} \left(z^{n-1} \mathcal{L}_c(y)(z) - E_0(\infty, 0)(y(0)z^{n-2} + D^\alpha y(0)z^{n-3} + \dots + (D^\alpha)^{n-2}y(0)) \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + a_1(z\mathcal{L}_c(y)(z) - E_0(\infty, 0)y(0)) + a_0\mathcal{L}_c(y)(z) \\
 = & (z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \dots + a_1z + a_0)\mathcal{L}_c(y)(z) - E_0(\infty, 0)(b_0z^{n-1} + (b_1 + b_2)z^{n-2} + (b_2 + b_1 + b_0)z^{n-3} \\
 & + \dots + (b_{n-2} + b_{n-1} + \dots + b_1 + b_0) + b_{n-1} + b_{n-2} + \dots + b_1 + b_0). \\
 l(z) = & E_0(\infty, 0)(b_0z^{n-1} + (b_1 + b_2)z^{n-2} + (b_2 + b_1 + b_0)z^{n-3} \\
 & + \dots + (b_{n-2} + b_{n-1} + \dots + b_1 + b_0) + b_{n-1} + b_{n-2} + \dots + b_1 + b_0).
 \end{aligned}$$

Then

$$(z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \dots + a_1z + a_0)\mathcal{L}_c(y)(z) = \mathcal{L}_c(f)(z) + l(z)$$

or

$$\mathcal{L}_c(y)(z)(y)(z) = \frac{1}{z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \dots + a_1z + a_0} (\mathcal{L}_c(f)(z) + l(z)).$$

Hence,

$$y(t) = \mathcal{L}_c^{-1} \left(\frac{1}{z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \dots + a_1z + a_0} (\mathcal{L}_c(f)(z) + l(z)) \right), t \geq 0.$$

Theorem 2.16. [16] Let $p, q \in \mathcal{C}_{rd}(\mathbb{T})$. Consider

$$D^\alpha y = (p(t) + k_1(\alpha, t))y + q(t), \quad t \in \mathbb{T}^\kappa, \quad (5)$$

$$y(t_0) = y_0, \quad (6)$$

where $t_0 \in \mathbb{T}$, $y_0 \in \mathbb{R}$. Suppose that

$$k_0(\alpha, t) + \mu(t)p(t) \neq 0, \quad \alpha \in (0, 1], t \in \mathbb{T}.$$

Then the problem (5) – (6) has a unique solution represented in the form

$$y(t) = y_0 E_{p+k_1}(t, t_0) + \int_{t_0}^t q(s) E_g(\sigma(s), t) \Delta_{\alpha, t} s, \quad s, t \in \mathbb{T}^\kappa,$$

where

$$g = \frac{p(\mu k_1 - k_0)}{k_0 + \mu p}.$$

Theorem 2.17. [16] Let $p \in \mathcal{C}_{rd}(\mathbb{T}) \cap \mathfrak{R}_c$ and $q \in \mathcal{C}_{rd}(\mathbb{T})$. Consider

$$D^\alpha y = p(t)y + q(t), \quad t \in \mathbb{T}^\kappa, \quad (7)$$

$$y(t_0) = y_0, \quad (8)$$

where $t_0 \in \mathbb{T}$, $y_0 \in \mathbb{R}$. We can rewrite the equation (7) in the form

$$D^\alpha y = (p(t) - k_1(\alpha, t) + k_1(\alpha, t))y + q(t) \quad t \in \mathbb{T}^\kappa.$$

Because $p \in \mathfrak{R}_c$, we have

$$1 + \mu(t)(p(t) - k_1(\alpha, t)) \neq 0, \quad \alpha \in (0, 1], t \in \mathbb{T}^\kappa.$$

Therefore, the solution y of (7) can be represented in the form

$$y(t) = y_0 E_p(t, t_0) + \int_{t_0}^t q(s) E_g(\sigma(s), t) \Delta_{\alpha, t} s, \quad t \in \mathbb{T}^\kappa,$$

where

$$g = \frac{(p - k_1)(\mu k_1 - k_0)}{k_0 + \mu(p - k_1)}.$$

3. Main Results

In this section, we solve proportional versions of learning and forgetting models with proportional Laplace transform on time scales. What these solutions mean in psychology can be examined by scientists interested in that subject. Here, $k_0(\alpha, t)$ and $k_1(\alpha, t)$ satisfy condition (A1), f and Q are constants and $\alpha \in [0,1]$.

Since differential equations are transformed into polynomials that are easier to solve with the Laplace transform, it is used in modeling time-independent linear systems and solving differential equations, in various problems such as the initial value theorem, final value theorem and boundary value problem, in probability theory, and because it clearly shows the frequency characteristic of the relevant function. It is also used in processing. There are various methods used when solving proportional dynamic equations on the time scale. Since the Laplace transform has a detailed literature on the proportional time scale and its known functionality in the classical case, the problem addressed in this study will be solved using proportional Laplace transform on time scale.

The model in the classical case has not only been generalized to proportional derivative on the time scale, but also the functions in the classical case have been changed in various ways and solutions have been obtained with the following theorems.

In the following theorems, proportional learning-forgetting models will be solved in four different situations on \mathbb{T} . Here, in addition to the Laplace transform, solutions were obtained for each model with two theorems used for first-order proportional dynamic equations on time scales.

Theorem 3.1. Consider

$$D^\alpha y(t) = Q - fy(t), \quad (9)$$

$$y(0) = \beta, \quad \beta \in \mathbb{R}.$$

The solution of this proportional IVP is

$$y(t) = \beta E_{-f}(t, 0) - \frac{Q}{f} E_{-f}(t, 0) + \frac{Q}{f}.$$

Proof. If we apply proportional Laplace transform to both sides of (9) and consider Theorem 2.14, we get

$$\mathcal{L}_c(D^\alpha y(t))(z) = Q\mathcal{L}_c(1) - f\mathcal{L}_c(y(t))(z),$$

$$z\mathcal{L}_c(y(t))(z) - E_0(\infty, 0)y(0) = Q\frac{E_0(\infty, 0)}{z} - f\mathcal{L}_c(y(t))(z),$$

$$(z + f)\mathcal{L}_c(y(t))(z) = Q\frac{E_0(\infty, 0)}{z} + E_0(\infty, 0)y(0),$$

$$\mathcal{L}_c(y(t))(z) = Q\frac{E_0(\infty, 0)}{z(z+f)} + \frac{E_0(\infty, 0)}{z+f}y(0).$$

By applying inverse proportional Laplace transform to last equation and set $y(0) = \beta$, we get

$$y(t) = \beta E_{-f}(t, 0) - \frac{Q}{f} E_{-f}(t, 0) + \frac{Q}{f}.$$

Conclusion 3.2. From Theorem 2.17., the solution to problem (9) is

$$y(t) = \beta E_{-f}(t, 0) + \int_0^t Q E_g(\sigma(s), t) \Delta_{\alpha, t} s, \quad t \in \mathbb{T}^\kappa,$$

where

$$g = \frac{(p-k_1)(\mu k_1 - k_0)}{k_0 + \mu(p-k_1)}.$$

Theorem 3.3. Consider

$$D^\alpha y(t) = E_Q(t, 0) - fy(t), \quad (10)$$

$$y(0) = \beta, \quad \beta \in \mathbb{R}.$$

The solution of this proportional *IVP* is

$$y(t) = \beta E_{-f}(t, 0) + \frac{1}{f+Q} E_Q(t, 0) - \frac{1}{f+Q} E_{-Q}(t, 0).$$

Proof. Considering proportional Laplace transform for equation (10) and using Theorem 2.14, we can perform the following operations;

$$\mathcal{L}_c(D^\alpha y(t))(z) = \mathcal{L}_c(E_Q(t, 0)) - f \mathcal{L}_c(y(t))(z),$$

$$z \mathcal{L}_c(y(t))(z) - E_0(\infty, 0)y(0) = \frac{E_0(\infty, 0)}{z-Q} - f \mathcal{L}_c(y(t))(z),$$

$$(z+f) \mathcal{L}_c(y(t))(z) = \frac{E_0(\infty, 0)}{z-Q} + E_0(\infty, 0)y(0),$$

$$\mathcal{L}_c(y(t))(z) = \frac{E_0(\infty, 0)}{(z+f)(z-Q)} + \frac{E_0(\infty, 0)}{z+f} y(0).$$

If inverse proportional Laplace transform is applied to perform necessary calculations, we get

$$y(t) = \beta E_{-f}(t, 0) + \frac{1}{f+Q} E_Q(t, 0) - \frac{1}{f+Q} E_{-f}(t, 0).$$

Conclusion 3.4. From Theorem 2.17., the solution to problem (10) is

$$y(t) = \beta E_{-f}(t, 0) + \int_0^t E_Q(s, 0) E_g(\sigma(s), t) \Delta_{\alpha, t} s, \quad t \in \mathbb{T}^\kappa,$$

where

$$g = \frac{(p-k_1)(\mu k_1 - k_0)}{k_0 + \mu(p-k_1)}.$$

Theorem 3.5. Consider

$$D^\alpha y(t) = \text{Cosh}_Q(t, 0) - f y(t), \tag{11}$$

$$y(0) = \beta, \quad \beta \in \mathbb{R}.$$

The solution of this proportional *IVP* is

$$y(t) = \beta E_{-f}(t, 0) + \frac{f}{Q^2 - f^2} E_{-f}(t, 0) - \frac{f}{Q^2 - f^2} \text{Cosh}_Q(t, 0) + \frac{Q}{Q^2 - f^2} \text{Sinh}_Q(t, 0).$$

Proof. Now let us solve equation (11) by proportional Laplace transform. By applying proportional Laplace transform to both sides of (11), we get

$$\mathcal{L}_c(D^\alpha y(t))(z) = \mathcal{L}_c(\text{Cosh}_Q(t, 0)) - f \mathcal{L}_c(y(t))(z)$$

$$z \mathcal{L}_c(y(t))(z) - E_0(\infty, 0)y(0) = \frac{z E_0(\infty, 0)}{z^2 - Q^2} - f \mathcal{L}_c(y(t))(z),$$

$$(z+f) \mathcal{L}_c(y(t))(z) = E_0(\infty, 0)y(0) + \frac{z E_0(\infty, 0)}{z^2 - Q^2},$$

$$\mathcal{L}_c(y(t))(z) = \frac{E_0(\infty, 0)}{z+f} y(0) + \frac{z E_0(\infty, 0)}{(z+f)(z^2 - Q^2)}.$$

If the necessary calculations are made and $y(0) = \beta$ is taken into consideration, we get

$$y(t) = \beta E_{-f}(t, 0) + \frac{f}{Q^2 - f^2} E_{-f}(t, 0) - \frac{f}{Q^2 - f^2} \text{Cosh}_Q(t, 0) + \frac{Q}{Q^2 - f^2} \text{Sinh}_Q(t, 0).$$

Conclusion 3.6. From Theorem 2.17., the solution to problem (11) is

$$y(t) = \beta E_{-f}(t, 0) + \int_0^t \text{Cosh}_Q(s, 0) E_g(\sigma(s), t) \Delta_{\alpha, t} s, \quad t \in \mathbb{T}^\kappa,$$

where

$$g = \frac{(p-k_1)(\mu k_1 - k_0)}{k_0 + \mu(p-k_1)}.$$

Theorem 3.7. Consider

$$D^\alpha y(t) = \text{Cosh}_Q(t, 0) + E_Q(t, 0) - fy(t), \quad (12)$$

$$y(0) = \beta, \quad \beta \in \mathbb{R}.$$

The solution of this proportional IVP is

$$y(t) = \beta E_{-f}(t, 0) + \frac{f}{Q^2 - f^2} E_{-f}(t, 0) - \frac{f}{Q^2 - f^2} \text{Cosh}_Q(t, 0) + \frac{Q}{Q^2 - f^2} \text{Sinh}_Q(t, 0) + \frac{1}{f+Q} E_Q(t, 0) - \frac{1}{f+Q} E_{-f}(t, 0).$$

Proof. Let us take the proportional Laplace transform in equation (12). Considering $y(0) = \beta$ and Theorem 2.14, the following calculations can be made;

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_c(D^\alpha y(t))(z) &= \mathcal{L}_c(\text{Cosh}_Q(t, 0)) + \mathcal{L}_c(E_Q(t, 0)) - f \mathcal{L}_c(y(t))(z), \\ z \mathcal{L}_c(y(t))(z) - E_0(\infty, 0)y(0) &= \frac{zE_0(\infty, 0)}{z^2 - Q^2} + \frac{E_0(\infty, 0)}{z - Q} - f \mathcal{L}_c(y(t))(z), \\ (z + f) \mathcal{L}_c(y(t))(z) &= E_0(\infty, 0)y(0) + \frac{zE_0(\infty, 0)}{z^2 - Q^2} + \frac{E_0(\infty, 0)}{z - Q}, \\ \mathcal{L}_c(y(t))(z) &= \frac{E_0(\infty, 0)}{z + f} y(0) + \frac{zE_0(\infty, 0)}{(z + f)(z^2 - Q^2)} + \frac{E_0(\infty, 0)}{(z + f)(z - Q)}. \end{aligned}$$

If inverse proportional Laplace transform is applied to last equation, we get

$$y(t) = \beta E_{-f}(t, 0) + \frac{f}{Q^2 - f^2} E_{-f}(t, 0) - \frac{f}{Q^2 - f^2} \text{Cosh}_Q(t, 0) + \frac{Q}{Q^2 - f^2} \text{Sinh}_Q(t, 0) + \frac{1}{f+Q} E_Q(t, 0) - \frac{1}{f+Q} E_{-f}(t, 0).$$

Conclusion 3.8. From Theorem 2.17., the solution to problem (12) is

$$y(t) = \beta E_{-f}(t, 0) + \int_0^t (\text{Cosh}_Q(s, 0) + E_Q(s, 0)) E_g(\sigma(s), t) \Delta_{\alpha, t} s, \quad t \in \mathbb{T}^\kappa,$$

where

$$g = \frac{(p-k_1)(\mu k_1 - k_0)}{k_0 + \mu(p-k_1)}.$$

4. Conclusion

Learning is the phenomenon obtained by the individual as a result of his/her experiences. Forgetting is the change that occurs in learning over time. In this study, some proportional learning and forgetting models, which are very important fields of study in psychology, is discussed. This model is reconstructed with the help of proportional derivative and handled with various learning functions. These models are solved with the help of proportional Laplace transform. After using the Laplace transform for each of the models considered, solutions are presented with the help of two theorems that give the solutions of first-order proportional dynamic equations on the time scale. These solutions can be evaluated especially by scientists working in the field of psychology. With this study, the results obtained in the classical case have been generalized. Specific choices of time scale and alpha value give the results obtained in the classical case.

References

- [1] Baleanu D, Fernandez A. On Fractional Operators and Their Classifications. *Mathematics* 2019; 7(9): 830-839.
- [2] Baleanu D, Lopes AM. (Eds.) *Handbook of Fractional Calculus with Applications, Applications in Engineering, Life and Social Sciences, Part A*. Berlin: De Gruyter, 2019.
- [3] Magin, RL. *Fractional calculus in bioengineering*. New York: Begell House, 2006.
- [4] Agrawal, OP. A numerical scheme for initial compliance and creep response of a system. *Mech. Res. Commun.* 2009; 36(4): 444-451.
- [5] Sheela Jacob J, Hellan Priya J, Karthika A. Applications of Fractional Calculus in Science and Engineering, *Journal Of Critical Reviews* 2020; 7(13): 4385-4395.
- [6] Fulger D, Scalas E, Germano G. Monte Carlo simulation of uncoupled continuous-time random walks yielding a stochastic solution of the space-time fractional diffusion equation, *Phys. Rev. E* 2008; 77(2): 1-7.

- [7] Kumar P, Agrawal OP. An approximate method for numerical solution of fractional differential equations, *Signal Processing* 2006; 86(10): 2602–2610.
- [8] Mainardi F, Luchko Y, Pagnini G. The fundamental solution of the space-time fractional diffusion equation, *Fractional Calculus and Applied Analysis* 2001; 4(2): 153–192.
- [9] Bastos NRO. *Fractional Calculus on Time Scales*. Ph.D. thesis, University of Aveiro, 2012.
- [10] Benkhetto N, Brito da C, Artur MC, Torres DFM. A fractional calculus on arbitrary time scales: Fractional differentiation and fractional integration, *Signal Processing*, 2015; 107; 230–237.
- [11] Hilger S. *Ein maßkettenkalkül mit anwendung auf zentrumsannäherungen*. Ph.D. thesis, University of Würzburg, 1988.
- [12] Bohner M, Peterson A. *Dynamic equations on time scales: An introduction with applications*. New York: Springer Science & Business Media, 2001.
- [13] Bohner M, Peterson A. *Advances in Dynamic Equations on Time Scales*. Boston: Birkhauser, 2003.
- [14] Jarad F, Abdeljawad T, Alzabut J. Generalized fractional derivatives generated by a class of local proportional derivatives. *The European Physical Journal Special Topics* 2017; 226, 3457–3471.
- [15] Anderson DR, Ulness DR. Newly defined conformable derivatives. *Advances in Dynamical Systems and Applications* 2015; 10(2): 109–137.
- [16] Anderson DR, Georgiev SG. *Conformable Dynamic Equations on Time Scales*. Florida: CRC Press, 2020.
- [17] Baleanu D, Fernandez A, Akgül A. On a fractional operator combining proportional and classical differintegrals. *Mathematics* 2020; 8(3): 360.
- [18] Almeida R, Agarwal RP, Hristova S, O'Regan D. Quadratic Lyapunov Functions for Stability of the Generalized Proportional Fractional Differential Equations with Applications to Neural Networks. *Axioms* 2021; 10(4): 322.
- [19] Xu C, Farman M, Akgül A, Nisar KS, Ahmad A. Modeling and analysis fractal order cancer model with effects of chemotherapy. *Chaos, Solitons & Fractals* 2022; 161: 112325.
- [20] Farman M, Shehzad A, Akgül A, Baleanu D, Sen MDL. Modelling and analysis of a measles epidemic model with the constant proportional Caputo operator. *Symmetry* 2023; 15(2): 468.
- [21] Zhu Q. Model-free sliding mode enhanced proportional, integral, and derivative (SMPID) control. *Axioms* 2023; 12(8), 721.
- [22] Luo Y, Chen Y. Fractional order [proportional derivative] controller for a class of fractional order systems. *Automatica* 2009, 45(10); 2446-2450.
- [23] Hamed YS, Albogamy KM, Sayed M. A proportional derivative (PD) controller for suppression the vibrations of a contact-mode AFM model. *IEEE Access* 2020; 8: 214061-214070.
- [24] Alsahlani A, Randhir K, Hayes M, Schimmels P, Ozalp N, Klausner J. Design of a Combined Proportional Integral Derivative Controller to Regulate the Temperature Inside a High-Temperature Tubular Solar Reactor. *Journal of Solar Energy Engineering* 2023; 145(1): 011011.
- [25] Ibrahim NM, Talaat HE, Shaheen AM, Hemade BA. Optimization of Power System Stabilizers Using Proportional-Integral-Derivative Controller-Based Antlion Algorithm: Experimental Validation via Electronics Environment. *Sustainability* 2023; 15(11): 8966.
- [26] Karatas Akgül E, Akgül A, Baleanu D. Laplace Transform Method for Economic Models with Constant Proportional Caputo Derivative, *Fractal and Fractional* 2020; 4(3): 30.
- [27] Edelstein-Keshet, L. *Mathematical Models in Biology*, USA; SIAM, 2005.
- [28] Anderson JN, Schooler LJ. Reflections of the environment in memory. *Psychological Science* 1991; 6(2), 396–408.
- [29] Jaber MY. Learning and forgetting models and their applications, *Handbook of industrial and system engineering* 2014; 535–566.
- [30] Zhang X, Li Q, Wang L, Liu ZJ, Zhong Y. Cdc42-Dependent Forgetting Regulates Repetition Effect in Prolonging Memory Retention. *Cell reports* 2016; 16(3) : 817–825.
- [31] Basden BH, Basden DR, Gargano, GJ. Directed forgetting in implicit and explicit memory tests: A comparison of methods, *Journal of Experimental Psychology: Learning, Memory, and Cognition* 1993; 19(3): 603–616.
- [32] Wixted, JT. Absolute versus relative forgetting, *Journal of Experimental Psychology: Learning, Memory, and Cognition* 2022; 48(12): 1775-1786.

Ultrases Dalgasının Cevher Hazırlama ve Zenginleştirme İşlemlerinde Uygulamaları

Kiraz EŞMELİ^{1*}

¹ Maden Mühendisliği Bölümü, Mühendislik ve Doğa Bilimleri Fakültesi, Konya Teknik Üniversitesi, Konya, Türkiye
*¹ kesmeli@ktun.edu.tr

(Geliş/Received: 06.02/2024;

Kabul/Accepted: 25/02/2024)

Öz: Ultrases dalgası, maddesel bir ortama ihtiyaç duyarak insan işitme limitinin üzerindeki frekanslarda yayılan bir ses dalgasıdır. Ultrases dalgası sıvılar içerisinde yayıldığında kavitasyon adı verilen kabarcıklar oluşturur. Kavitasyon kabarcıkları ultrasonik işlemin en önemli özelliğidir. Ultrases dalgası, endüstrinin birçok alanında kullanılmasının yanısıra cevher hazırlama ve zenginleştirme de kullanım alanı bulmuştur. Ultrases dalgası başta flotasyon olmak üzere öğütme, liç, katı-sıvı ayırımı, aglomerasyon, flokülasyon gibi cevher hazırlama ve zenginleştirme proseslerinde kullanılmıştır. Literatürde ultrasonik işlem farklı cihazlar, frekanslar, yöntemler kullanılarak flotasyonun değişik aşamalarında ve farklı minerallerin flotasyonunda uygulanmıştır. Flotasyon ile yapılan çalışmaların çoğu kömür flotasyonu üzerine yapılmıştır. Bu çalışmada ultrases dalgalarının özellikleri detaylı olarak incelenmiştir. Ayrıca, literatürde yer alan ultrasonik işlemin cevher hazırlama ve zenginleştirme proseslerinde kullanımı ile ilgili daha önceki çalışmalar derlenmiş ve sonuçları yorumlanmıştır.

Anahtar kelimeler: Ultrases, kavitasyon, flotasyon, liç, sedimentasyon.

Applications of Ultrasound Wave in Mineral Preparation and Processing

Abstract: Ultrasound, a sound wave that spreads at frequencies above the human hearing limit, requiring a material medium. When ultrasound is propagated in liquids, it creates bubbles called cavitation. Cavitation bubbles are the most important characteristic of ultrasonic processing. In addition to being used in various fields of industry, ultrasonics has also found application in ore preparation and mineral processing. Ultrasound is a sound wave that propagates at frequencies above the limit of human hearing and requires a material medium. When ultrasound is propagated in liquids, it creates bubbles called cavitation. Cavitation bubbles are the most important characteristic of ultrasonic processing. In addition to being used in various fields of industry, ultrasonics has also found application in ore preparation and enrichment. Ultrasonic processing has been used in ore preparation and enrichment processes such as flotation, grinding, leaching, solid-liquid separation, agglomeration, and flocculation. In the literature, ultrasonic processing has been applied to different stages of flotation and flotation of different minerals using different devices, frequencies, and methods. Most of the studies on flotation have been conducted on coal flotation. In this study, the properties of ultrasound waves were studied in detail. In addition, previous studies on the use of ultrasonic processing in ore preparation and enrichment processes in the literature have been compiled and their results have been interpreted.

Keywords: Ultrasound, Cavitation, Flotation, Leaching, Sedimentation.

1. Giriş

Yeni madencilik rezervlerinin keşfi ve maden yataklarının ekonomik olarak işletilmesi, cevher hazırlama teknolojilerinin kullanılmasını zorunlu kılmaktadır. Madenlerin ekonomik olarak işletilmesi cevher hazırlama teknolojisine bağlıdır. Ülkelerin ekonomik gelişimi doğal kaynakların yüksek katma değerle kullanılmasına ve madencilik üretimlerinin geliştirilmesine bağlıdır. Bu bağlamda, cevher hazırlama ve zenginleştirme sürecinin önemi artmaktadır; çünkü bu süreç, cevherdeki mineralleri endüstrinin ihtiyaçlarını karşılayacak hale getirmek için yapılan işlemleri kapsar [1]. Bu nedenle, zenginleştirme işlemlerinin geliştirilmesi için pek çok çalışma yapılmaktadır ve ultrasonik işlem kullanımı da bu çalışmalar içerisinde kendine yer bulmuştur.

Ses dalgaları, madde içinde titreşim hareketi yaparak ilerler. Bu titreşim hareketinin frekansı, insan kulağının duyabilme yeteneğini belirler. İnsan kulağının duyamadığı frekanslardaki ses, ultrasonik, ultrases veya sesötesi olarak adlandırılır. 20 kHz'nin üzerinde frekansa sahip mekanik titreşim dalgasına ultrasonik dalga denir; ultrasonik kavitasyon etkisi, minerallerin özelliklerini veya durumunu değiştirmektedir. Ultrasonik titreşim genellikle malzemelerin fiziksel özelliklerini karakterize etmek için kullanılırken, aynı zamanda tıbbi tasarımlarda,

* Sorumlu yazar: kesmeli@ktun.edu.tr. Yazarların ORCID Numarası: ¹ 0000-0001-5699-5199.

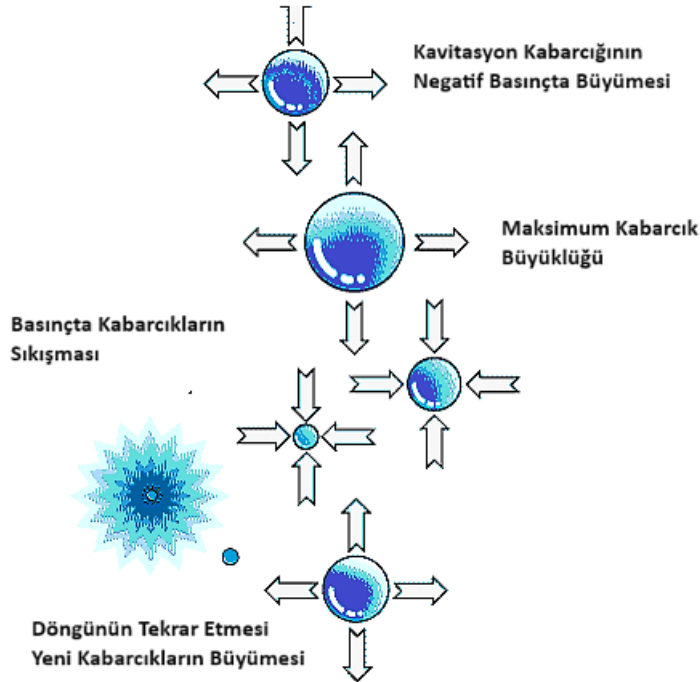
malzeme test yöntemlerinde, temizleme süreçlerinde, kaynak (eritme) süreçlerinde ve birçok endüstride emülsiyonlarda parçacık stabilitesi sağlamak için de kullanılır [2,3].

Son yıllarda, mineral zenginleştirme alanında ultrasonik işlem kullanımı daha fazla dikkat çekmiş ve özellikle kömür flotasyonu üzerinde çeşitli çalışmalar yapılmıştır [4-17]. Akustik kavitasyonun, kolektör etkisini artırarak parçacık yüzeylerini temizlemesi ve böylece şlam kaplamalarını azaltması, ultrasonik işlemin flotasyon çalışmalarında başarılı olmasının nedenlerinden biri olarak belirtilmiştir [18-20]. Ayrıca, ultrasonik kavitasyon sonucu oluşan mikro kabarcıkların kömür-kabarcık yapışma verimini artırmak için potansiyel olduğu da belirtilmektedir [5]. Öte yandan, ultrasonun fiziksel ve kimyasal etkileri henüz açıklanmamıştır. Farklı ultrasonik yoğunluklar ve sürelerle ve farklı yöntemlerle (ön işlem ve eşzamanlı) kullanımı farklı sonuçlara yol açmıştır.

Bu çalışmada öncelikle ultrasonik ses dalgaları ve özellikleri hakkında bilgi verilecek, ardından ultrasonik işlemin cevher hazırlama ve zenginleştirme proseslerinde kullanımı ile ilgili yapılmış literatürde bulunan önceki çalışmalar derlenip, yorumlanıp, sonuçlar karşılaştırılacaktır.

2. Ultrasonik Kavitasyon Kabarcıkları

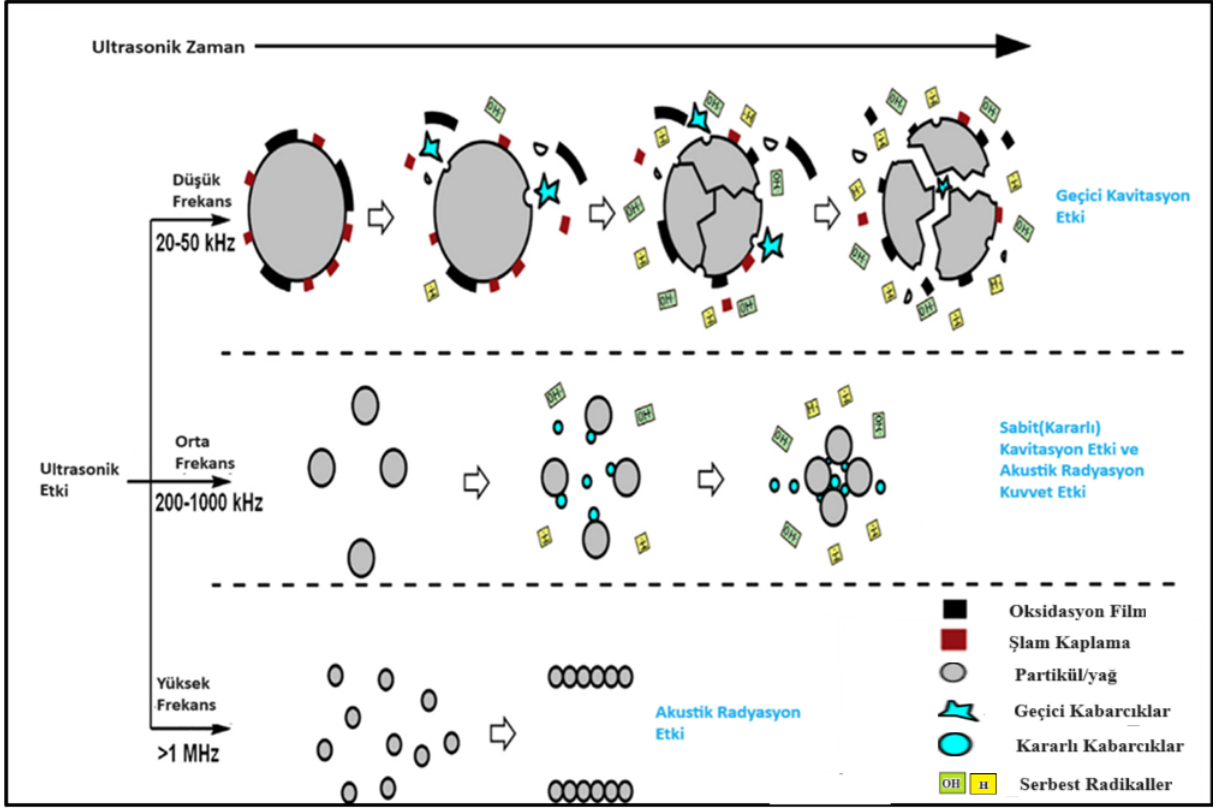
Ultrases dalgası, ardışık sıkıştırma ve seyreltme döngülerinden oluşan üç boyutlu bir basınç dalgasıdır. Seyreltme döngüsü negatif basınca sahiptir ve takip eden sıkıştırma döngüsü pozitif basınca sahiptir. Seyreltme döngüsü, sıvıyı bir arada tutan ara moleküler kuvvetleri aşarak mikro kabarcıkların oluşumuna neden olur, ardından sıkıştırma döngüsü anlık olarak lokalize bir enerji patlaması meydana getirir. Bu olay, kavitasyon olarak adlandırılmaktadır [20-22].



Şekil. 1. Kavitasyon Kabarcıklarının Oluşumu [23]

Kavitasyon kabarcıkları "geçici kavitasyon" ve "kararlı kavitasyon" olmak üzere iki türe ayrılır [24]. Geçici kavitasyon kabarcıkları, boyutları genişlemesinden sonra pozitif basınç yarı döngüsünde şiddetli bir şekilde çöker ve birçok küçük kabarcığa bölünür. Kararlı kavitasyon kabarcıkları ise bir çekirdek olarak başlar ve difüzyonu düzeltmeyle büyür. Kavitasyon kabarcıklarının yapısı, kabarcıklar ile partiküller arasındaki mineralizasyon verimliliği açısından önemlidir [24,25]. 20 ila 40 kHz frekans aralığındaki düşük frekansta ultrasonik, özellikle

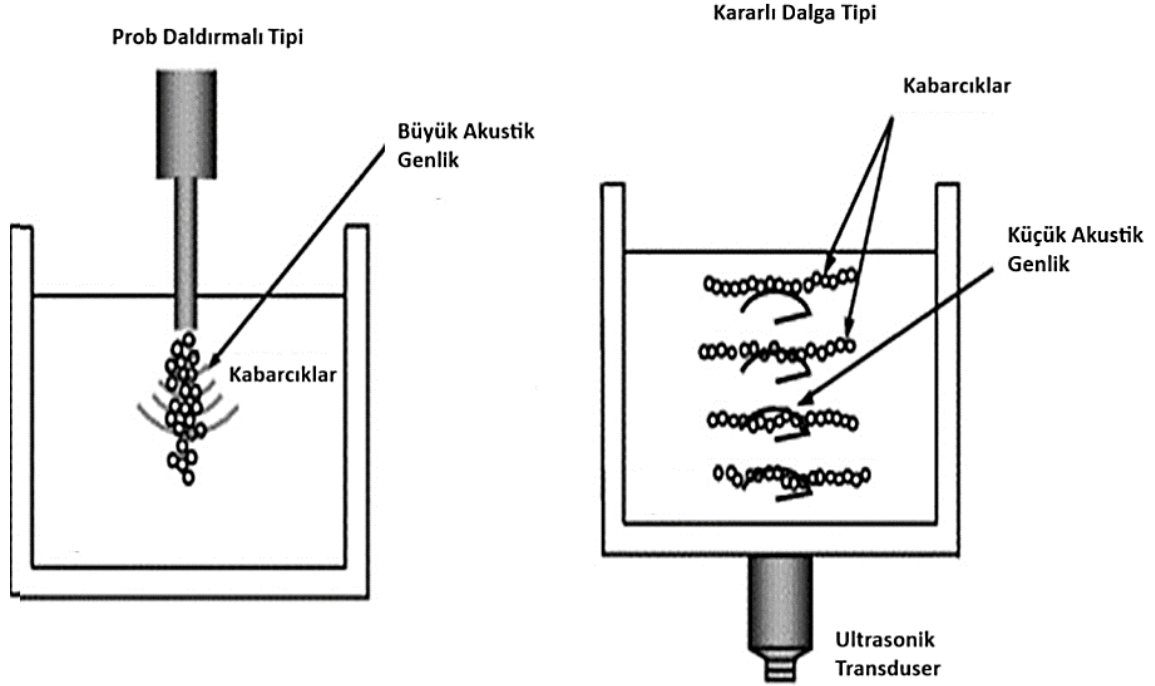
kavitasyon etkisiyle işlem sonuçlarına etki ederken, 400 kHz ve 1 MHz üzerindeki akustik akıntı etkisi belirleyici bir rol oynar. Literatürde yapılmış çalışmalara göre, düşük frekanslı bir ultrasonik işlem, küçük hacimlerde akustik enerjiyi yoğunlaştırma özelliği nedeniyle cevher zenginleştirme süreçlerinde etkin olabileceği belirtilmiştir [26]. Bu nedenle, kavitasyon, ince kömürün flotasyon performansını artırmak için başlıca mekanizma olarak kabul edilmektedir.



Şekil. 2. Kavitasyon Kabarcıkları [17]

2.1. Ultrasonik işlem cihazları ve uygulama metotları

Ultrasonik işlem pratikte ultrasonik problar ve banyolar olmak üzere iki farklı cihaz ile uygulanır. Ultrasonik prob tarafından üretilen ses dalgaları, korna tipi dalgalar olarak da adlandırılan trompet benzeri görünürler. Dalgaların türü, prob konumunda en yüksek genliği üretir ve bu nedenle çok güçlü mekanik ve kimyasal etkiler elde edebilir (Şekil 3a). Ultrasonik banyolarda ise ultrasonik dönüştürücüler genellikle banyo haznesinin alt kısmına konumlandırılmıştır [25,27-29]. Prob tipi ultrasonik ekipmanla karşılaştırıldığında, banyo tipi ultrasonik ekipmanın en büyük özelliği, sensör tarafından üretilen duran dalgaların paralel yayılım olmasıdır. (Şekil 3b).



Şekil 3. Farklı ultrasonik cihazlar tarafından üretilen dalga formları [29]

Ultrasonik ön işlem ve eşzamanlı muamele minerallerin flotasyonunun iyileştirmek için kullanılan iki yaygın yöntem olarak bilinmektedir. Ultrasonik ön işlem tekniği, flotasyondan önce ön koşullanma sürecinde uygulanmaktadır. Mineral tanecığının yüzeyi geçici kavitasyon etkisi ile temizlenmekte ve süspansiyon içine eklenen flotasyon reaktifleri, mineral yüzeyi ile daha iyi bir bağ oluşturmak için yeterince dağılma sağlayarak flotasyon başarısını artırmaktadır. Flotasyondan önce ultrason uygulaması, kabarcıkların yükselmesi için orta derecede bir akış alanı sağlamaktadır. Flotasyondan bağımsız bir süreç olan ultrasonik ön işlem yönteminde, ultrasonik uygulama süresi ve yoğunluğu kolayca ayarlanabilmektedir. Ultrasonik işlem eş zamanlı uygulama yöntemi ultrasonik ön işlem ile karşılaştırıldığında, ultrasonik işlemin geleneksel flotasyon kabarcıkları üzerindeki etkisi daha belirgin olmaktadır [17,29]. Ultrasonik eş zamanlı uygulama tekniği, geleneksel flotasyon kabarcıklarını daha küçük bir boyuta böler, bu da ince partiküllerin flotasyonunu artırmaya yardımcı olmaktadır. Ancak, ultrason yoğunluğu aşırı büyük olduğunda kabarcıklar, reaktif ve tanecikler arasındaki ayrılma olasılığı da önemli ölçüde artmaktadır. Bu yöntemin daha çok kimyasal kollektör adsorpsiyon gerektiren mineral flotasyonu için faydalı olduğu belirtilmiştir [15,16].

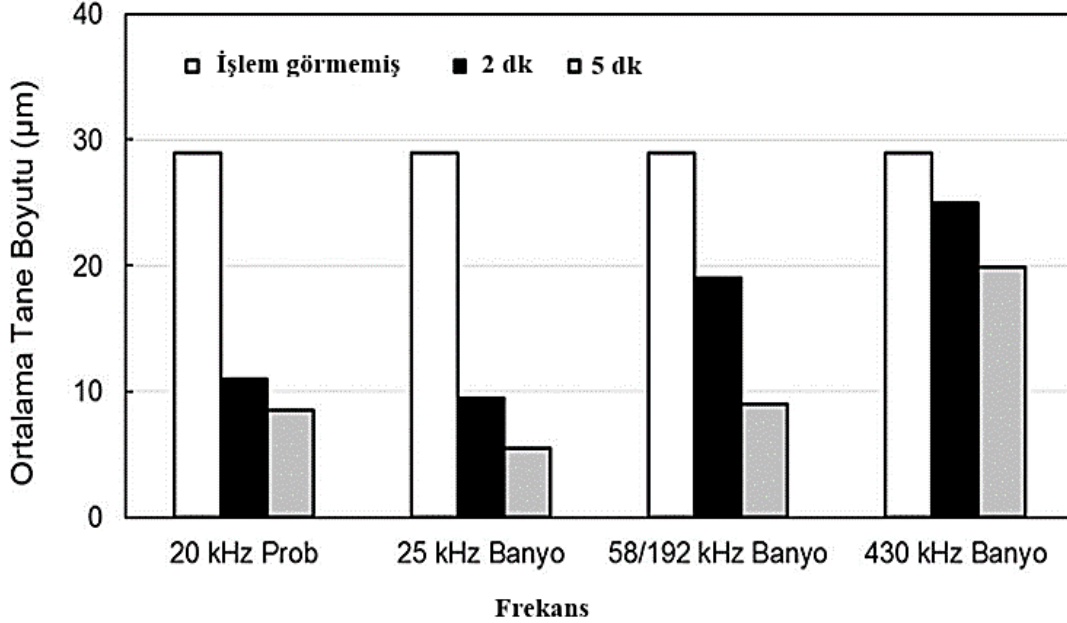
3. Ultrasesin Cevher Hazırlama ve Zenginleştirme İşlemlerinde Kullanımı

3.1. Öğütme işleminde kullanımı

Yerkovic vd. [30] yaptıkları çalışmada, Şili porfiri bakır cevherinin ultrasonik işlem etkisi altında öğütülmesi konusunda farklı sonuçlara ulaşmışlardır. Araştırmada, kömür ve kireçtaşı gibi yumuşak malzemelerin yanı sıra, daha sert olan bakır cevherlerinin de ultrasonik merdaneli öğütücüyle başarılı bir şekilde öğütebileceği gözlemlenmiştir. Bu çalışma, bakır cevherlerinin öğütülmesi için umut verici bir alternatif olarak değerlendirilmiştir.

Gaeto- Garretton vd. [31] tarafından yapılan çalışmada, araştırmacılar öğütme işlemi için ultrasonik titreşimin kullanılabilirliğini incelemiştir. Ultrasonik enerji uygulamasıyla normal öğütme koşulları karşılaştırıldığında, ultrasonik titreşimin daha az enerji harcadığı sonucuna ulaşılmıştır.

Ambedkar vd. [26] çalışmalarında ultrasonik işlemin farklı frekans değerlerine bağlı olarak kömür tane boyutuna etkisini araştırmışlar ve düşük frekanstaki ultrasonik işlemin kısa sürelerde uygulanmasıyla ortalama tane boyutunu azalttığını belirtmişlerdir. (Şekil 4).



Şekil 4. Ultrasonik frekansın farklı sürelerde kömür tane boyutu üzerine etkisi [26]

Kömür üzerinde yapılan başka bir çalışmada Kang vd. [32] ultrasonik işlemin tane boyutuna etkisini saptamak amacıyla ultrasonik işlemden önce ve sonra elek analizleri yapmışlardır. Sonuç olarak, ultrasonik enerjinin kömürün tane boyutunu küçültmede daha etkili olduğunu not etmişlerdir.

Toraman [33] tarafından yapılan çalışmada, ultrasonik işlem kullanılarak kalsit cevheri üzerinde yapılan muamelelerin, partikül büyüklüğünün azaltılmasında başarılı sonuçlar verdiği ifade edilmiştir. Bu yöntem kullanılarak elde edilen ince partiküllerin daha homojen, düşük boyutlu ve yüksek yüzey alanına sahip olduğu belirtilmiştir. Ultrasonik işlemin kalsit cevherinin öğütülmesini kolaylaştırdığı ve endüstriyel uygulamalarda avantaj sağlayabileceği sonucuna varılmıştır.

3.2. Susuzlandırma işlemlerinde kullanımı

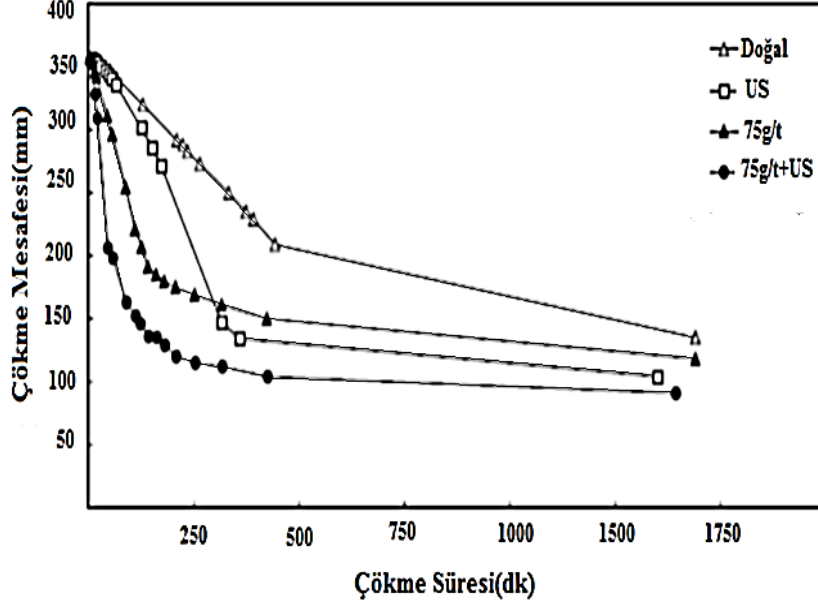
Singh [34], vakum filtrasyonunda ince kömür susuzlandırma verimini artırmak için sonik dalgaların etkileri üzerine bir araştırma yapmıştır ve optimum koşullar altında, atık kek neminin azaldığını ve filtrasyon hızının da arttığını belirtmiştir.

Swamy vd. [35] çalışmalarında, susuzlandırma öncesi taneli örneklerin ses dalgalarının etkisiyle nem içeriğinden arındırılabilmesi araştırılmıştır. Bu çalışmada, manyezit, kalsiyum karbonat, kum ve talaş örnekleri kullanılmıştır. Sonuç olarak, ultrasonik titreşimin kullanıldığı durumlarda nem içeriğinde bir azalma olduğu tespit edilmiştir. Bu bulgular, ses dalgalarının taneli örneklerin kurutulmasında etkili bir yöntem olabileceğini göstermiştir.

Riera-Franco de Sarabia vd. [36] tarafında yapılan çalışmada, ince parçacıkları gaz ve sıvı ortamlardan ayırmak için yüksek yoğunluklu ultrasonik kullanmışlardır. Çalışmanın sonuçları, yüksek yoğunluklu ultrasonik titreşimin parçacıkların ayrılmasında geleneksel yöntemlere göre daha etkili olduğunu göstermektedir.

Önal vd. [20] tarafından yapılan çalışmada, killerin sedimantasyonu için ultrasonik enerji, flokülant ilavesi ve pülp yoğunluğu gibi faktörlerin etkisi araştırılmıştır. Çalışmada, farklı yerlerden alınan kil örnekleri kullanılmış ve bu örnekler üzerinde deneyler gerçekleştirilmiştir. Sonuçlar, ultrasonik işlemin sedimantasyon süresini kısalttığını göstermiştir. Yani, kil örnekleri ultrasonik enerjiye maruz kaldığında, çökelme işlemi daha hızlı gerçekleşmiştir. Ayrıca, flokülant ilavesi ve pülp yoğunluğunun da sedimantasyon süresi üzerinde etkili olduğu belirlenmiştir (Şekil 5). Bu çalışma, killerin susuzlaştırılması sürecinde ultrasonik işlemin kullanımının faydalı

olduğunu ortaya koymaktadır. Ultrasonik enerji, kilin sedimentasyonunu hızlandırarak süreci daha verimli hale getirmektedir. Bu bulgular, sanayide killerin susuzlaştırılması sürecinde ultrasonik işlemin kullanılmasının avantajlı olabileceğini göstermektedir.

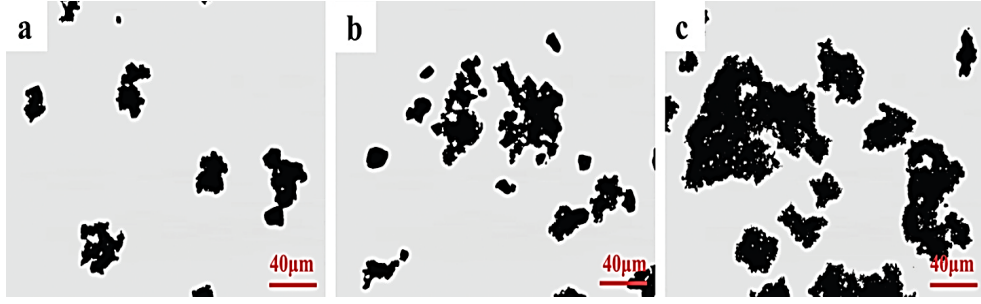


Şekil 5. Kil sedimentasyonu üzerine ultrasonik işlemin etkisi (Flokülant varlığında ve yokluğunda karşılaştırılması [20]).

3.3. Flokülasyon ve yağ aglomerasyonu işlemlerinde kullanımı

Katı sıvı sistemlerinde büyük etkiler gerçekleştiren ultrasonik titreşimin, flotasyon işlemlerinin yanında seçimli flokülasyon ve yağ aglomerasyonu işlemlerinde kullanımına yönelik sınırlı sayıda çalışmalar bulunmaktadır. Burat vd. [37], yüksek frekanslı bir titreşimli elek kullanarak ince kömür partiküllerinin susuzlandırmasında ultrasonun etkilerini araştırdılar ve ultrasonik işlem ile daha düşük nem içeriği elde ettiler.

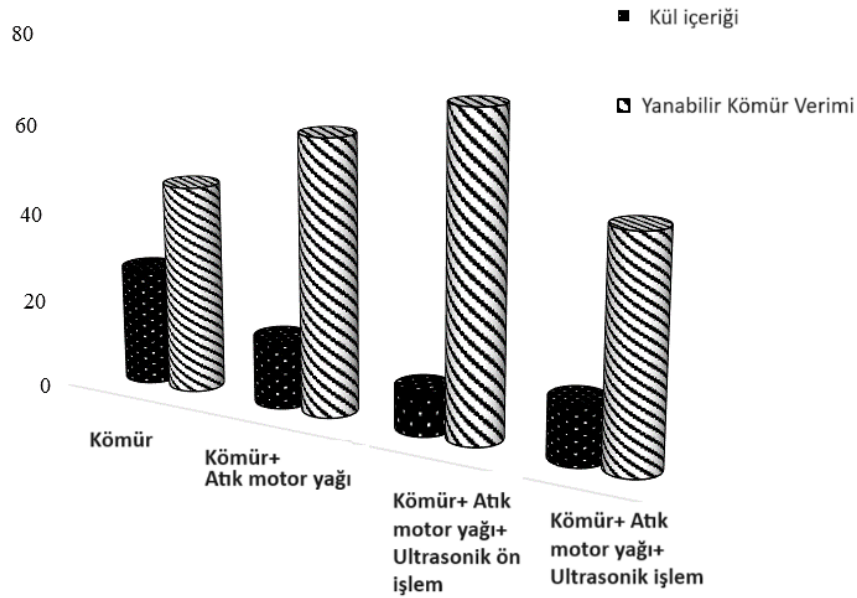
Demir vd. [38] çalışmalarında, Türkiye'nin Ağildere ve Hisarcık bölgelerinin bor atıklarının flokülasyon üzerindeki etkisini, anyonik, katyonik ve non-iyonik flokülantların varlığında incelemiştir ve flokülasyona destek amaçlı ultrasonik işlem kullanılmıştır. Sonuçlar, ultrasonik uygulamanın her iki numunenin çökeltme oranını düşürmesine rağmen, ultrasonik işlem varlığında daha kompakt bir çökelti yatağının oluşması nedeniyle Hisarcık numunesi için daha düşük tortu yatağı yüksekliklerinin elde edildiğini göstermiştir. Ding vd. [39] yaptıkları çalışmada ultrasonik ön muamelesinin flok boyutunda bir artışa (Şekil 6) neden olduğunu, böylece kömür şlam suyunun çökmesini artırdığını belirtmişlerdir. Ayrıca, ultrasonik ön işlemin, yeni bir aktif yüzey oluşturarak, flokülantın kömür şlam parçacıklarının yüzeyine adsorpsiyonunu artırarak ve parçacık istikrarsızlaşmasını destekleyen parçacık potansiyelini azaltarak kömür şlam parçacıklarının flokülasyonuna ve çökmesine katkıda bulunduğu sonucuna varmışlardır.



Şekil 6. Ultrasonik işlemden önce ve sonra kömür şlam floklarının karşılaştırılması (a: 0 dk, b: 4 dk, c: 8 dk) [39].

Ozkan ve Esmeli [40] kolemanit süspansiyon kararlılığı üzerine ultrasonik işlemin etkisini araştırmışlardır. Deneysel bulgular sonucunda, ultrasonik uygulamanın süspansiyon kararlılığını azalttığını; yani, ultrasonik işlemin kolemanit süspansiyonunun flokülasyonunu artırdığı sonucuna varmışlardır. Ozkan ve Esmeli [41] selestitin kollektörlerle gerçekleştirilen makaslama flokülasyon işleminde ultrasonik enerji kullanımını araştırmışlar ve ultrasonik işlemin mineral süspansiyonları için ön faz olarak kullanılması durumunda, ince mineral parçacıklarının flokülasyonunun iyileştirilebileceğini göstermişlerdir. Ancak, ultrasonik işlemin doğrudan aglomerasyon aşamasına uygulandığında (yalnızca ultrason kaynaklı çökeltme), selestit parçacıklarının flokülasyon sürecinin olumsuz etkilendiğini kaydetmişlerdir.

Şahinoğlu ve Uslu'nun [42] çalışmasında, 9.5-72.8 Watt/cm² arasındaki ultrasonik güç değerlerinin kullanıldığı durumlarda, kül uzaklaştırma oranlarının arttığı belirtilmiştir. Bu çalışmada ultrasonik işlem uygulanan numunenin morfolojik analizi yapılmış ve kömür yüzeyinde bulunan çatlak ve kırıkların ultrasonik muameleden sonra azaldığı kömür yüzeyinden kil ve diğer mineral maddelerin uzaklaştığı tespit edilmiştir. Bu sebeple, ultrasonik işlemin kavitasyon etkisiyle kömür yüzeyindeki oksitlenmiş tabakayı azalttığı ve daha temiz kömür yüzeyleri ve boşlukları oluşturduğu düşünülmektedir. Bu sonuçlar, daha yüksek ultrasonik güç değerlerinin daha etkili kül uzaklaştırma sağladığını göstermektedir. Esmeli [43] tarafından yapılan atık motor yağı ile kömür aglomerasyon çalışmasında da benzer bulgular kaydedilmiş, yüksek güç değerinde ultrasonik ön işlem uygulanmasının kömür süspansiyonunun kül içeriğini azaltırken, yanabilir verim de de azalmaya yol açtığı kaydedilmiştir (Şekil 7).



Şekil 7. Linyit süspansiyonunun kül içeriği ve yanabilir kömür verimi [43]

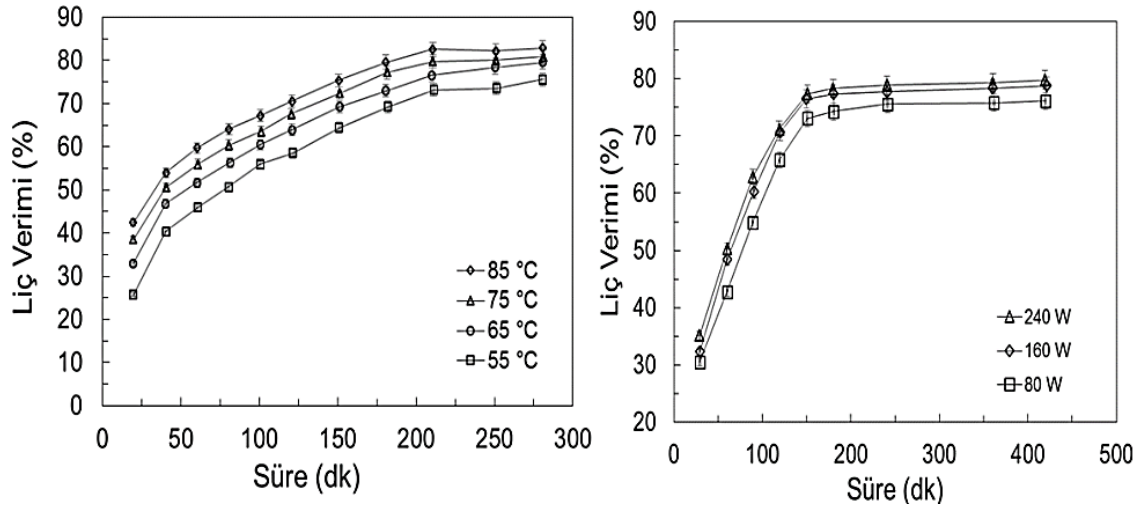
Esmeli [44] çalışmasında ultrasonik işlemin barit cevherinin yağ aglomerasyonu üzerindeki etkisini araştırmıştır ve ultrasonik işlemin, baritin yağ aglomerasyonu sürecinde bir ön işlem olarak uygulanması durumunda baritin aglomerasyon verimini arttırmanın yanı sıra oleat ve gazyağı tüketimini de azalttığını kaydetmiştir. Ayrıca ultrasonik işlemin temas açısı değerlerini ultrasonuz yapılan deneylere kıyasla artırdığı belirtilmiştir.

3.4. Liç işlemlerinde kullanımı

Slaczka [45], tarafından yapılan çalışma, karbonatlı çinko cevherlerinin amonyak liçinde ultrasonik enerjinin kullanılmasının etkisini araştırmayı amaçlamıştır. Ultrasonik alanın uygulanması, liç edilen cevherin yüzeyindeki difüzyon tabakasının kalınlığını azaltarak liçin daha hızlı gerçekleşmesini sağlamıştır. Swamy vd. [46], nikel cevherinin mikrobiyal liç işlemine ultrasonik titreşimin etkisini incelemiştir. Ultrasonik işlem ile gerçekleştirilen mikrobiyal liç işlemi, sıradan asit liçlerinin kullanıldığı işlemlerle karşılaştırılmıştır. Nikel veriminin ultrasonik işlem ile daha yüksek olduğu tespit edilmiştir. Bu sonuçlar, ultrasonik titreşimin mikrobiyal liç işleminde etkin bir rol oynayabileceğini göstermektedir.

Ultra ses destekli liç teknolojisi, kalkopirit [47], çinko oksit cevheri [48], nikel laterit cevheri [49], nadir toprak cevheri [50], refrakter altın cevheri [51], refrakter gümüş cevheri [52], kuvars kumu [53], sfalerit [54,55] gibi metal cevherlerinden değerli metallerin çıkarılmasında yaygın olarak uygulanmıştır. Literatürde yapılan çalışmalarda, ultra ses destekli liçin, geleneksel mekanik karıştırmaya kıyasla, liç verimini artırma, liç süresini kısaltma, kimyasal reaktif tüketimini azaltma vb. konularda büyük potansiyele sahip olduğu belirtilmiştir.

Wang vd. [56] tarafından yapılan çalışmada ultrasonik etkisinin sülfirik asit liçi üzerine etkisi araştırılmıştır. Şekil 8’ de görüldüğü gibi, liç süresi ve sıcaklığı liç verimini etkilemiştir ve ultrasonik işlemin güç değerlerine bağlı olarak verim de artmıştır.



Şekil.8. Ultrason süresinin liç verimine etkisi [56]

3.5. Flotasyon işlemlerinde kullanımı

Tablo 1, ultrasonik işlemin mineral flotasyonuna etkisi üzerine yapılmış çalışmaları özetlemektedir. Flotasyon çalışmalarında, ultrasonik işlemin olumlu etkisi, ultrasonik işlemin reaktiflerin süspansiyon içerisinde daha homojen dağılım sağlayarak reaktiflerin performanslarını artırmasına bağlanmıştır [4,20]. Başka bir etki ise akustik kaviteasyonun partikül yüzeylerini temizlemesi ve şlam tabakaların oluşmasını en aza indirgeyerek reaktiflerin etkisini kolaylaştırması ve buna bağlı olarak reaktif tüketimini azaltması olarak açıklanmaktadır.

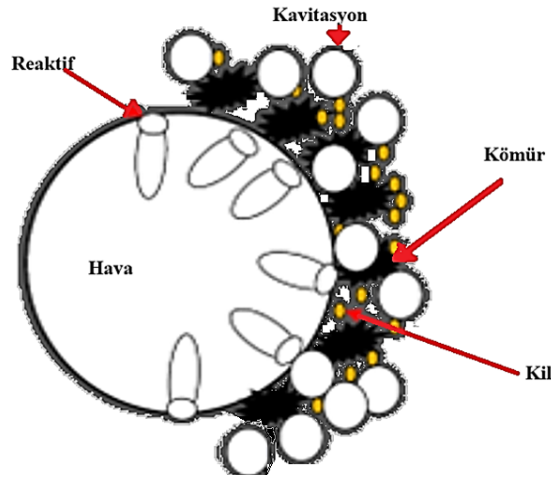
Tablo1. Ultrasonik işlemin mineral flotasyonuna etkisi üzerine yapılmış çalışmalar

Kullanılan cevher	Metot	Sonuç	Referans
Barit-florit-kuvars cevherinden baritin kazanımı flotasyonu	Ultrasonik işlem	Çalışmalar sonucunda, ultrasonik ön işlemin baritin seçimliliğini arttırdığı bulunmuştur.	[46]
Bakır cevheri flotasyonunda	Ultrasonik işlem	Bu çalışmada ultrasonik işlem ile metal veriminde % 6 oranında daha fazla bir iyileşme sağlandığı sonucuna varılmıştır.	[57]
Kolemanit flotasyonu	Ultrasonik işlem	Ultrasonik işlem, kolemaniti kaplayan kil taneciklerinin seçimli olarak ayrılmasına yardımcı olduğu belirtilmiştir.	[4]
Manyezit şamlarının flotasyon ile kazanılması	Ultrasonik eş zamanlı flotasyon	Ultrasonik işlemin köpük alma zamanını ve köpük kararlılığını arttırdığını belirlemiştir.	[58]
Arsenopirit flotasyonu	Ultrasonik ile ön koşullandırma	Ultrasonik işlemin oksitli arsenopiritin oksit tabakasını uzaklaştırarak verimi arttırdığı sonucuna varmışlardır.	[59]
Kuvars -kalsit barit - pirit -galen flotasyonu	Ultrasonik işlem	Ultrasonik işlemin, kalsit, galen ve barit flotasyon verimi üzerinde olumlu etkisi olurken, kuvars flotasyon verimini üzerinde olumsuz bir etkiye sahip olduğunu tespit etmişlerdir.	[60]
Bakır-demir sülfür cevheri	Ultrasonik eş zamanlı flotasyon	Ultrasonik işlem sayesinde flotasyon seçiciliğinde ve veriminde önemli bir iyileşme gözlemlenmiştir.	[61]
Barit ve kalkopirit flotasyonu	Köpük bölgesinde ultrasonik işlem	Ultrasonik işlemin mineral seçiciliği üzerine etkisi olduğu ve ultrasonik işlem uygulanmış deneyler ile uygulanmayan deneyler arasında kabarcık dağılımı arasında anlamlı bir fark olduğu ileri sürülmüştür.	[62]
Kolemanit flotasyonu	Ultrasonik ön işlem	Ultrasonik ön muamele sonucunda %49 tenörlü %80 verim değerine sahip kolemanit konsantresi elde edilebilmiştir.	[63]
Kurşun-çinko-bakır cevheri	Ultrasonik ön işlem	Ultrasonik ön işlemin, ultrasonik temizleme banyosunda üretilen kaviteasyon kabarcıkları tarafından salınan enerji nedeniyle çinko flotasyonunda tenörü ve verimi artırmıştır.	[64]
Kuvars-amin flotasyonu	Ultrasonik işlem	Ultrasonik güç değerinin artmasıyla flotasyon verimi %45'ten sırasıyla %64 ve %66'ya çıkmıştır.	[65]
Bakır flotasyonu üzerine ultrasoniğin etkisi	Ultrasonik eş zamanlı flotasyon	Atıklardan bakırın geri kazanılmasında ultrasonik işlem ile % 3.5 artış elde edilmiştir.	[66]
Oksitli Pirit cevheri	Ultrasonik eş zamanlı flotasyon	Ultrasonikasyon, ultrasonun sadece flotasyon sırasında kullanıldığı piritin geri kazanımını önemli ölçüde iyileştirdi. Ek olarak, ultrasonikasyon, flotasyon hücresinde pirit flotasyonu için de faydalı olan ince kabarcıkların oluşumunu artırmıştır.	[67]
Grafit	Ultrasonik ön işlem	Grafit şlamından grafit cevherinin geri kazanımını önemli ölçüde artırabildiğini buldu.	[68]
Siderit varlığında kuvars flotasyon	Ultrasonik işlem	Kuvars flotasyon verimini ultrasonik işlemle sonra yaklaşık %50 oranında artırmıştır.	[69]
Pirotit-klorit flotasyonu	Ultrasonik ön işlem uygulaması	Ultrasonik ön işlem ile pirotitin kloritten flotasyon ayrımını artırmıştır.	[70]

Zhou vd. [71] çalışmalarında, kavitasyonun ince minerallerin flotasyonu üzerindeki olumlu etkisini iki faktöre bağlamıştır. Birincisi: Kavitasyonun, kabarcıklar arasında köprü oluşturarak tane boyutunun büyümesine sebep olduğunu ve bunun da tane/kabarcık çarpışma olasılığını artırmasıdır. İkinci faktörü ise; Yüzeylerine küçük kabarcıklar yapışmış tanelerin, flotasyon kabarcıklarına daha kolay tutunmasıyla ve mineral tanesine küçük kabarcıkların yapışmasından sonra tane-küçük kabarcık ikilisinin flotasyon boyutundaki kabarcığa tutunup birleşmesiyle açıklamaktadır.

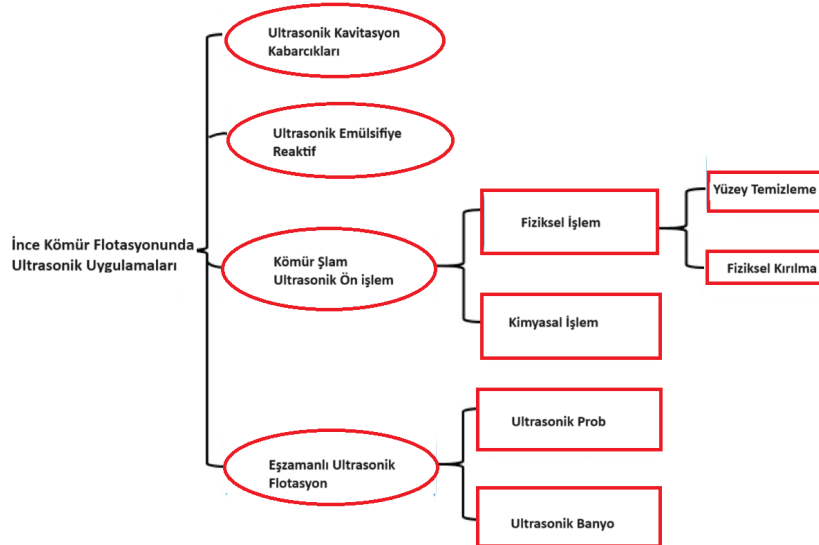
3.5.1. Kömür flotasyonu üzerine ultrasonik işlemin etkisi

Kömür flotasyonunda, ayrılma süreci büyük ölçüde hava kabarcıklarının mineralizasyon düzeyine bağlıdır. Ultrasonik kavitasyonun flotasyon kabarcık boyutu veya köpük tabakası üzerindeki etkisi birçok bilim insanı tarafından da rapor edilmiştir. Ultrasonik etkisi ile oluşan kavitasyon kabarcıklarının kömür üzerindeki fiziksel mekanizması Şekil 9'da gösterilmektedir. Kavitasyon kabarcıkları ikincil bir kollektör görevi yaparak partiküllerin tutunma olasılığını arttırmakta, ayrılma olasılığını ise azaltmaktadır [72].



Şekil 9. Kavitasyon ile ultrason destekli kabarcıkların önerilen mekanizması [72]

Çeşitli araştırmacılar tarafından gerçekleştirilen kömür flotasyonunda ultrasonik işlem kullanımına ilişkin çalışmalar Şekil 10'da gösterildiği gibi, ultrasonik kavitasyon kabarcıkları, ultrasonik emülsiyonlaştırılmış reaktif, ultrasonik ön işlem (yüzey temizliği, fiziksel işlem ve kimyasal işlem) ve eş zamanlı gerçekleştirilen ultrasonik flotasyon (ultrasonik prob veya banyo kullanılarak) gibi çalışma alanlarını kapsamaktadır.



Şekil 10. İnce kömür flotasyonunda ultrason uygulaması [13].

Mao vd. [14] tarafından yapılan flotasyon çalışmalarını, ultrasonik ön işlem flotasyonu ve ultrasonik eş zamanlı flotasyonu kapsamaktadır ve ultrasonik ön işlem flotasyonunun geleneksel flotasyona göre kül içeriğini azalttığı, ancak verimde kayda değer bir değişim olmadığı belirtilmiştir. Ancak, ultrasonik eş zamanlı flotasyon yöntemi ile hem kül içeriğinde hem de verimde iyileşmeler gözlemlenmiştir. Ayrıca, kömür partiküllerinin pürüzlü yüzeyindeki küçük kabarcıkların kavitasyon davranışı nedeniyle kül içeriğini azalttığını tespit etmişlerdir. Ayrıca, ultrasonun yüksek güç etkisi nedeniyle kabarcıkların birleştiğini ve küresel şekillerini koruduğu belirlenmiştir ve bu kabarcıklardaki değişikliğin verimde iyileşmenin nedenlerinden biri olabileceğini öne sürmüşlerdir. Özkan ve Kuyumcu [6], eşzamanlı ultrasonik flotasyon sırasında hava kabarcığının, geleneksel flotasyona kıyasla daha homojen ve daha ince olduğunu gözlemlemişlerdir. Ancak, kavitasyondan etkilenen kabarcık büyüklüğü ile flotasyon performansı arasındaki ilişki henüz araştırılmamıştır. Li vd. [73] ise ultrasonik eş zamanlı kok kömürü flotasyonunu araştırmış ve geleneksel flotasyona kıyasla daha yüksek yanabilir verim ve daha düşük kül içeriği bulmuşlardır. Ayrıca, taramalı elektron mikroskopuyla ultrasonun, kömürün yüzeyine yapışmış şlamı azalttığını ortaya koymuşlardır.

Xu vd. [9], oksitlenmiş kömür flotasyonu üzerine ultrason ön işleminin etkisini araştırmışlardır. Bu çalışmada, kömür veriminin başlangıçta arttığını daha sonra artan ultrasonik işlem süresi ile azaldığını belirtmişlerdir. Kömür veriminin başlangıçta artması, oksijenli tabakanın uzaklaştırılmasıyla açıklanmıştır, ancak ardından gelen verim azalmasını, uzun süreli ultrasonik işleme maruz kalması nedeniyle kömür yüzeyinin tekrar oksitlenmesine bağlamışlardır. Kang vd. [74], ultrasonik ön koşullandırmanın yüksek kükürt içerikli kömür flotasyonu üzerindeki etkisini incelemişlerdir. Bu çalışmada, ultrasonik işlemin kömür pülpünün yüzey yapısını ve kömürün yüzey yapısını değiştirerek kömür flotasyonunda kükürt giderimini artırdığı belirlenmiştir.

Fan vd. [72] çalışmalarında nano kabarcıkların flotasyona etkilerini, tane boyutu, tane yoğunluğu ve yüzebilirlik özelliklerine bağlı olarak araştırmıştır. Bu çalışmada, mekanik ve kolon flotasyonunda nano kabarcık kullanımının flotasyon verimini %8 ile %27 değerleri arasında bir iyileşme sağladığı tespit edilmiştir. Peng vd. [8], kavitasyon tarafından üretilen mikro-kabarcıkların varoluşsal durumunu nitel olarak analiz etmişlerdir. Ultrasonik uygulama ve köpürtücü eklenmeksizin yapılan deneyler ile ultrasonik uygulaması olmayan deneyler arasında kabarcık durumu açısından önemli bir fark olmadığını bulmuşlardır. Ancak, flotasyon hücresine köpürtücü eklenmesi durumunda ultrasonik işleme birçok stabil mikro-kabarcık üretildiği tespit edilmiştir. Kömür şlamında, kavitasyon tarafından üretilen bu mikro-kabarcıkların kömür yüzeyine yapışarak ve kabarcık-parçacık bağlanmasında bir köprü vazifesi görerek flotasyon konsantrisinde kül miktarının azalmasına yol açtığı belirtilmiştir. Prozorov vd. [75] yaptıkları çalışmada ultrasonik işlem uygulanan ortamda tanelerin çarpışmasını araştırmışlardır. Kavitasyon kabarcığının patlaması sırasında oluşan şok dalgalarının tanelerin yüksek hızda çarpışmasına sebebiyet verdiğini belirtmişlerdir. Bu çarpışmalar sırasında çarpışma noktasında oluşan yüksek ısılardan birçok katı-sıvı reaksiyonunu artırdığını belirtmişlerdir.

4. Sonuçlar ve Öneriler

Ultrasonik işlem, cevher hazırlama ve zenginleştirme proseslerinde yüzey temizleme ve verimi artırmak için kullanılabilir. Ultrasonik uygulama, ön işlem veya eş zamanlı olarak proseslerde uygulanabilmektedir. Ultrasonik işlemin etkilerini etkileyen faktörler arasında cihazın özellikleri, uygulama şartları, uygulama aşaması ve ortam sıcaklığı yer almaktadır. Ayrıca ultrasonik cihazın uygulanma süresi ve frekans değerleri de etkileyici faktörler arasında yer almaktadır. Ultrasonik işlem özellikle flotasyon olmak üzere öğütme, liç, katı-sıvı ayrımı, aglomerasyon, flokülasyon gibi cevher hazırlama ve zenginleştirme proseslerinde kullanılmıştır. Flotasyon çalışmalarında, ultrasonik işlemin olumlu etkisi, reaktiflerin süspansiyon içinde daha homojen bir dağılım sağlayarak performanslarını artırmasına bağlanmıştır. Bununla birlikte, akustik kavitasyonun partikül yüzeylerini temizleyerek ve şlam tabakalarının oluşmasını en aza indirgeyerek reaktiflerin etkisini kolaylaştırması ve reaktif tüketimini azaltması gibi başka bir etkisi de vardır. Dolayısıyla, ultrasonik işlemin yüzey temizleme ve şlam uzaklaştırma yeteneği sayesinde flotasyon üzerinde olumlu bir etkisi olduğu söylenebilir. Bunun yanı sıra, ultrasonik işlemin mineral-kollektör arasındaki zayıf bağları kırarak olumsuz etkilerinin olabileceği de düşünülmektedir. Cevher zenginleştirme proseslerinde ultrasonik işlem kullanımı genellikle laboratuvar ölçeğinde denenmiş olup pilot ve endüstriyel ölçeklerde denemelerin yapılması, farklı frekans ve güç seviyelerinde ultrasonik enerji destekli zenginleştirme cihazlarının tasarlanmasıyla zenginleştirme tesislerinde ultrasonik işlemin kullanılması yaygın hale getirilebilir.

Teşekkür

K.E., fikir sahibi olup sonuçları yorumladı ve makaleyi yazdı.

Kaynaklar

- [1] Erdemoğlu M, Göktaş M. Mermer artıklarından katma değeri yüksek seramik tozlarının üretimi. Mermer ve Çevre Çalıştayı, Muğla, Turkey ,2018
- [2] Fuchs F. Ultrasonic cleaning: fundamental theory and application, www. blackstone-ney. com/pdfs, 2002
- [3] Duran K, Perinçek D, Körlü E, Bahtiyari M. Ultrason teknolojisinin tekstilde kullanım olanakları. Tekstil ve konveksiyon 2007; 162- 166.
- [4] Celik MS. Effect of ultrasonic treatment on the floatability of coal and galena. Sep. Sci. Technol. 1989; 24:1159–1166,
- [5] Ozkan ŞG, Kuyumcu, HZ. Investigation of mechanism of ultrasound on coal flotation. Int. J. Miner. Process. 2006; 81:201–203.
- [6] Ozkan ŞG, Kuyumcu HZ. Design of a flotation cell equipped with ultrasound transducers to enhance coal flotation. Ultrason. Sonochem. 2007; 14: 639–645,
- [7] Ozkan,ŞG. Effects of simultaneous ultrasonic treatment on flotation of hard coal slimes. Fuel 2012; 93:576–580
- [8] Ozkan ŞG. Further investigations on simultaneous ultrasonic coal flotation. Minerals 2017; 7: 177
- [9] Xu M, Xing Y, Gui X, Cao Y, Wang D, Wang L. Effect of ultrasonic pretreatment on oxidized coal flotation, Energy Fuels 2017;31: 14367–14373, 2017.
- [10] Ghadyani M, Noaparast S, Tonkaboni SZ. A study on the effects of ultrasonic irradiation as pretreatment method on high-ash coal flotation and kinetics a study on the effects of ultrasonic irradiation as pretreatment method on high-ash coal flotation and kinetics. Int J Coal Prep Util 2018;38: 374-391.
- [11] Peng Y, Mao Y, Xia W, Li Y. Ultrasonic flotation cleaning of high-ash lignite and its mechanism. Fuel 2018;220:558–566
- [12] Mao Y, Peng Y, Bu X, Xie G, Wu E, Xia W. Effect of ultrasound on the true flotation of lignite and its entrainment behavior. Energy Sources, Part A: Recovery, Utilization, and Environmental Effects 2018;40: 940–950.
- [13] Mao Y, Xia W, Peng Y, Xie G. Ultrasonic-assisted flotation of fine coal: A review. Fuel Process. Technol. 2019a; 195: 106150,
- [14] Mao Y, Chen Y, Bu X, Xie G. Effects of 20 kHz ultrasound on coal flotation: The roles of cavitation and acoustic radiation force. Fuel 2019b ;256:115938.
- [15] Mao Y, Bu X, Peng Y, Tian F, Xie G. Effects of simultaneous ultrasonic treatment on the separation selectivity and flotation kinetics of high-ash lignite. Fuel 2020;259: 116270, 2020.
- [16] Chen Y, Xie G, Chang J, Grundy J, Liu Q. A study of coal aggregation by standing-wave ultrasound. Fuel 2019;248: 38–46, 2019.
- [17] Chen Y, Truong VNT, Bu X, Xie G. A review of effects and applications of ultrasound in mineral flotation. Ultrason. Sonochem.2020; 60: 104739, 2020.
- [18] Kopparthi P, Balamurugan S, Mukherjee AK. Effect of ultrasonic pre-treatment time on coal flotation. International Journal of Coal Preparation & Utilization 2020;40: 807-823, 2020.
- [19] Videla AR, Morales R, Saint-Jean T, Gaete L, Vargas Y, Miller JD. Ultrasound treatment on tailings to enhance copper flotation recovery. Miner. Eng. 2019;99: 89–95,
- [20] Önal G, Özer M, Arslan F Sedimentation of clay in ultrasonic medium. Miner. Eng 2003;16(2):129–134,
- [21] Altun NE, Hwang JY, Hıçyılmaz C. Enhancement of flotation performance of oil shale cleaning by ultrasonic treatment. Int. J. Miner. Process.2009; 91(1-2): 1–13.
- [22] Zbik MS, Du, J, Pushkarova RA, Smart R St C. Observation of gaseous films at solid–liquid interfaces: Removal by ultrasonic action. J. Colloid Interface Sci. 2009;336(2) :616–623.
- [23] Alp İ. Yüksek Frekanslı Ses Dalgalarının Cevher Zenginleştirmede Kullanılabilirliğinin Araştırılması. Dokora Tezi, Eskişehir Osman Gazi Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Eskişehir, 1998.
- [24] Leighton TG. The Acoustic Bubble, Academic Press, London, 1994.
- [25] Ashokkumar M. The characterization of acoustic cavitation bubbles – an overview. Ultrason. Sonochem. 2011; 18:864–872
- [26] Ambedkar B. Ultrasonic Coal-Wash for De-Ashing and De-Sulfurization: Experimental Investigation and Mechanistic Modeling. Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, 2012
- [27] Suslick KS, Kirk-Othmer encyclopedia of chemical technology. J. Wiley & Sons: New York, 26, 517-541, 1998.
- [28] Mason TJ. Chemistry with ultrasound, Society of Chemical Industry, London, , 1990;195.
- [29] Yasui K, Tuziuti T, Iida Y. Dependence of the characteristics of bubbles on types of sonochemical reactors. Ultrason. Sonochem. 2005;12 (1): 43–51,
- [30] Yerkovic C, Menacho J, Gaete L. Exploring the ultrasonic comminution of copper ores. Minerals engineering 1993; 6, (6):607-617
- [31] Gaete-Garretón L, Vargas-Hernandez Y, Velasquez-Lambert C. Application of ultrasound in comminution. Ultrasonics 2000; 38: 1-8, 345-352,
- [32] Kang W, Xun H, Hu J. Study of the effect of ultrasonic treatment on the surface composition and the flotation performance of high-sulfur coal. Fuel Process. Technol. 2008;89(12):1337–1344.
- [33] Toraman ÖY. Experimental investigations of preparation of calcite particles by ultrasonic treatment. Physicochemical Problems of Mineral Processing 2017;53(2):859-868, 2017.
- [34] Singh B. Ultrasonically assisted rapid solid-liquid separation of fine clean coal particles. Minerals engineering, 1999;12(4): 437-443.
- [35] Swamy K, Rao A, Narasimhan K. Acoustics aids dewatering. Ultrasonics 1983;21(6):280-281,

- [36] Riera-Franco de Sarabia E, Gallego-juarex JA, Rodrigez-Corral G, Elvira-Segura L, Gonzalez-Gomez I. Application of high-power ultrasound to enhance fluid solid particle separation processes. *Ultrasonics* 2000;38(38):642-646,
- [37] Burat F, Sirkeci AA, Önal G. Improved fine coal dewatering by ultrasonic pretreatment and dewatering aids. *Mineral Processing and Extractive Metallurgy Review* 2014;36, (2):129–135
- [38] Demir I, Gungoren C, Yücel Y, Ünver M, Çinku IK, Özkan Ş.G. Ultrasonic supported flocculation of borate tailings with differently charged flocculants. *Boron*. 2021;6 (3) :348–58. <https://doi.org/10.30728/boron.971892>
- [39] Ding S, Pan F, Zhou S, Bu X, Alheshibri M. Ultrasonic-assisted flocculation and sedimentation of coal slime water using the Taguchi method. *Energy Sources, Part A: Recovery, Utilization, and Environmental Effects*, 2023;45:4, 10523-10536, <https://doi.org/10.1080/15567036.2023.2247363>
- [40] Özkan A, Eşmeli K. Improvement of Colemanite Flocculation with Collectors by Ultrasound Treatment. Part. Sci. Technol 2022; 40:272–280.
- [41] Özkan A, Eşmeli K. Use of ultrasonic treatment as a pre-phase in the shear flocculation process. *Ultrasonics* 2023;107052
- [42] Şahinoğlu E, Uslu T. Increasing coal quality by oil agglomeration after ultrasonic treatment. *Fuel Process. Technol.* 2013a ;116: 332–338.
- [43] Eşmeli K. Improvement of lignite oil agglomeration by ultrasound process using waste engine oil. *Particulate Science and Technology* 2023; 41:544–554.
- [44] Eşmeli K. The effect of ultrasound treatment on oil agglomeration of barite. *Mineral Processing and Extractive Metallurgy Review* 2023;44: 189–200.
- [45] Slaczka AS. Effect of ultrasound on ammonium leaching of zinc from galmei ore. *Ultrasonics*. 1986;24(1):53-55.
- [46] Swamy KM, Sukla LB, Narayana KL, Kar RN, Panchanadikar VV. Use of ultrasound in microbial leaching of nickel from laterites. *Ultrasonics Sonochemistry* 1995;2 (1): 5-9.
- [47] Turan MD, Silva JP, Sâri ZA, Nadirov R, Toro, N. Dissolution of chalcopyrite in presence of chelating agent and hydrogen peroxide. *T. Indian. I. Metals*. 2022; 75 (1): 273–280.
- [48] He HP, Cao J, Duan N. Synergistic effect between ultrasound and fierce mechanical activation towards mineral extraction: a case study of ZnO ore. *Ultrason. Sonochem.* 2018;48 :163–170.
- [49] Zhang LB, Li HY, Peng JH, Srinivasakannan C, Li SW, Yin SH. Microwave and ultrasound augmented leaching of complicated zinc oxide ores in ammonia and ammonium citrate solutions. *Metals-Basel*. 2017;7 (6): 216
- [50] Cetintas S, Bingol D. Performance evaluation of leaching processes with and without ultrasound effect combined with reagent-assisted mechanochemical process for nickel recovery from Laterite: Process optimization and kinetic evaluation. *Miner. Eng.* 2020;157: 106562.
- [51] Yin SH, Pei JN, Jiang F, Li SW, Peng JH, Zhang LB, Ju SH, Srinivasakannan C. Ultrasound-assisted leaching of rare earths from the weathered crust elution-deposited ore using magnesium sulfate without ammonia-nitrogen pollution. *Ultrason. Sonochem.* 2018; 41: 156–162,
- [52] Hu YT, Guo P, Wang SX, Zhang LB. Leaching kinetics of antimony from refractory gold ore in alkaline sodium sulfide under ultrasound. *Chem. Eng. Res. Des.* 2020;164: 219–229.
- [53] Ladola YS, Chowdhury S, Roy SB, Pandit AB. Application of cavitation in uranium leaching. *Desalin. Water. Treat.* 2014;52 (1–3): 407–414.
- [54] Ma JY, Zhang YF, Qin YH, Wu ZK, Wang TL, Wang CW. The leaching kinetics of K-feldspar in sulfuric acid with the aid of ultrasound. *Ultrason. Sonochem.* 2017; 35:304–312.
- [55] Cilek EC, Ciftci H, Karagoz SG, Tuzci G. Extraction of silver from a refractory silver ore by sono-cyanidation. *Ultrason. Sonochem.* 2020;63: 104965.
- [56] Wang X, Srinivasakannan C, Xin-hui D, Jin-hui P, Da-jin Y, Shao-hua J. Leaching kinetics of zinc residues augmented with ultrasound. *Separation and Purification Technology* 2013;115: 66-72.
- [57] Djendova S, Mehandjiski V. Study of the effects of acoustic vibration conditioning of collector and frother on flotation of sulphide ores. *International journal of mineral processing* 1992;34(3): 205-217.
- [58] Özkan Ş.G. Beneficiation of magnesite slimes with ultrasonic treatment. *Minerals Engineering* 2002;15: 99-101.
- [59] Misra M, Raichur AM, Lan AP. Improved flotation of arsenopyrite by ultrasonic pretreatment. *Miner. Metal. Process.* 2003;20 (2): 93–96,
- [60] Gürpınar G. Ses ötesi dalgaların cevher zenginleştirmede kullanılabilirliğinin araştırılması. Doktora Tezi, Eskişehir Osmangazi Üniversitesi, Eskişehir, 108, 2007.
- [61] Cilek EC, Ozgen S. Effect of ultrasound on separation selectivity and efficiency of flotation. *Miner. Eng.* 2009;22: 1209–1217.
- [62] Cilek EC, Ozgen S. Improvement of the flotation selectivity in a mechanical flotation cell by ultrasound. *Sep. Sci. Technol.* 2010; 45:572–579.
- [63] Özkan Ş.G, Güngören C. Enhancement of colemanite flotation by ultrasonic pre-treatment. *Physicochem. Probl. Miner. Process.* 2012;48: 455–462.
- [64] Kursun H. A study on the utilization of ultrasonic pretreatment in Zinc flotation. *Sep. Sci. Technol.* 2014;49: 2975–2980.
- [65] Güngören C, Erbek TM, Özdemir O, Özkan Ş.G. Effect of simultaneous ultrasonic treatment on quartz-amine flotation system. XVI Balkan Mineral Processing Congress, Belgrade, Serbia, 2015;483-490.
- [66] Videla AR, Morales R, Saint-Jean T, Gaete L, Vargas Y, Miller JD. Ultrasound treatment on tailings to enhance copper flotation recovery. *Miner. Eng.* 2016;99: 89–95.

- [67] Cao QB, Cheng JH, Feng QC, Wen SM, Luo B. Surface cleaning and oxidative effects of ultrasonication on the flotation of oxidized pyrite. *Powder Technol.* 2017;311: 390–397.
- [68] Barma SD, Baskey PK, Rao DS, Sahu SN. Ultrasonic-assisted flotation for enhancing the recovery of flaky graphite from low-grade graphite ore. *Ultrason. Sonochem.* 2019; 56:386–396,
- [69] Yin W, Cai L, Ma Y, Wang Y. Mechanism of ultrasonic cavitation to improve the effect of siderite on quartz flotation. *Physicochem. Probl. Miner. Process.* 2023; 59(2): 165930,
- [70] Liao Y, Zhao G, Feng B, Yan H, Wu H, Hu W, Zhu D, Qiu T. Application of ultrasonic pre-treatment for flotation separation pyrrhotite from chlorite. *Colloid Surf. A* 2023;669: 131507.
- [71] Zhou Z A, Zheng X, Finch JA, Hu H, Rao SR. Role of hydrodynamic cavitation in fine particle flotation. *International Journal of Mineral Processing* 1997;51: 139-149.
- [72] Fan M, Tao D, Honaker R, Luo Z. Nanobubble generation and its applications in froth flotation (part iv): Mechanical cells and specially designed column flotation of coal. *Mining Science and Technology* 2010;20 (5): 641-671
- [73] Li Y, Xia W, Mao Y, Ma G, Peng Y, Xie G. Enhancement in selectivity of coking coal flotation by ultrasound simultaneous Treatment, *Current Works in Mineral Processing* 2020;2 (1): 1-9.
- [74] Kang W, Xun H, Kong X, Li M. Effects from changes in pulp nature after ultrasonic conditioning on high-sulfur coal flotation. *Min. Sci. Technol.* 2009;19(4): 498–502.
- [75] Prozorov T, Prozorov R, Suslick KS, High velocity interparticle collisions driven by ultrasound, *J. Am. Chem. Soc.* 2004;126 (43): 13890–13891.

Thermokinetic and Structural Shape Memory Effect Characteristics of Novel Quaternary CuAlNiCr HTSMA

Oktay KARADUMAN¹, İskender ÖZKUL², Gökhan İSTEK³, Canan Aksu CANBAY^{4*}

¹ Rare Earth Elements Application and Research Center (MUNTEAM), Munzur University, 62000, Tunceli/TURKEY

² Department of Mechanical Engineering, Faculty of Engineering, Mersin University, Mersin, TURKEY

^{3,4} Physics Department, Faculty of Science, Firat University, Elazığ/TURKEY

*⁴ caksu@firat.edu.tr

(Geliş/Received: 12/02/2024;

Kabul/Accepted: 27/03/2024)

Abstract: CuAlNi shape memory alloys (SMAs) are one of the most prominent Cu-based SMAs mainly due to their shape memory properties at high temperatures. Therefore, they are interested in high temperature SMA applications. Their good thermal stability but brittleness originated from their coarse grain size are their other pros and cons. In this study, the low-cost quaternary CuAlNiCr high-temperature SMA (HTSMA) with a new unprecedented chemical composition including trace amount of chromium element was fabricated by arc melting technique. After arc melting process, traditional homogenization of small alloy samples in the high β -phase temperature region and quenching them in iced-brine water were proceeded. To characterize the shape memory effect property of the alloy, differential calorimetry and microstructural X-ray diffraction (XRD) tests were carried out. The cyclic DSC (differential scanning calorimetry) tests carried out at various heating/cooling rates showed the splendid endothermic and exothermic peaks of reversible martensitic phase transformations in the temperature range between around 150-220 °C, thence the produced alloy is qualified as a high-temperature SMA. Using DSC peak analysis data, the finish and start temperatures of every martensitic phase transition, hysteresis gap, plus some other important thermodynamic parameters' values were also determined. Among them, the high enthalpy change amounts occurred during the transformations implied the good shape memory effect feature of the alloy. A DTA (differential thermal calorimetry) test taken at only one heating/cooling rate revealed both the reversible martensitic transformation peaks and the other phase transition peaks at higher temperatures. The consecutive phase transition step peaks of $\beta'1 \rightarrow B1(L2_1) \rightarrow B2 \rightarrow A2$ on the heating-part of the DTA thermogram curve of the alloy were observed as similar to those seen in the other Cu-based shape memory alloys. Furthermore, at room temperature, the presence and types of the martensite phases formed in the alloy were revealed by the XRD pattern of the alloy obtained by using $CuK\alpha$ radiation. The results showed that the novel CuAlNiCr high-temperature SMA can be useful in the high-temperature SMA applications.

Key words: High-temperature shape memory alloy, CuAlNiCr, martensitic transformation, DSC, DTA.

Termodinamik ve Yapısal Şekil Hafıza Etkisinin Dörtlü CuAlNiCr YSSHA Karakteristikleri

Öz: CuAlNi şekil hafızalı alaşımlar (SHA'lar), esas olarak yüksek sıcaklıklardaki şekil hafızalı özelliklerinden dolayı en öne çıkan Cu-bazlı SHA'lardandır. Bu SHA'lara bu nedenle yüksek sıcaklık SHA uygulamalarında ilgi duyulmaktadır. İyi termal kararlılıkları ancak iri tane boyutlarından kaynaklanan kırılabilirlikleri diğer artıları ve eksileridir. Bu çalışmada, eser miktarda krom elementi içeren benzersiz bir kimyasal bileşime sahip dörtlü CuAlNiCr yüksek sıcaklık SHA (YSSHA), ark eritme tekniği ile üretildi. Ark eritme işleminden sonra, küçük alaşım numunelerinin yüksek β fazı sıcaklık bölgesinde geleneksel homojenleştirilip tuzlu buzlu suda hızlıca soğutuldu. Alaşımın şekil hafıza etkisi özelliğini karakterize etmek için diferansiyel kalorimetri ve mikroyapısal X-ışını kırınımı (XRD) testleri gerçekleştirildi. Farklı ısıtma/soğutma hızlarında gerçekleştirilen diferansiyel taramalı kalorimetri (DSC) testleri, yaklaşık 150-220 °C arasındaki sıcaklık aralığında tersinir martensitik faz dönüşümlerinin olağanüstü ekzotermik ve endotermik piklerini gösterdi; bundan dolayı üretilen alaşım bir yüksek sıcaklık SHA olarak sınıflandırıldı. DSC pik analizi verileri kullanılarak her bir martensitik faz dönüşümünün başlangıç ve bitiş sıcaklıkları, histeresiz aralığı ve diğer bazı önemli termodinamik parametreleri belirlendi. Bunlar arasında, dönüşümler sırasında meydana gelen yüksek entalpi değişim miktarları, alaşımın iyi şekil hafıza etkisi özelliğine sahip olduğuna işaret etmiştir. Tek bir ısıtma/soğutma hızında daha yüksek sıcaklıklara kadar çıkılarak yapılan diferansiyel termal kalorimetri (DTA) testi, hem tersinir martensitik dönüşüm piklerini yine ve hem de diğer faz geçiş piklerinin oluştuğunu gösterdi. Alaşımın DTA eğrisinin ısınma kısmında $\beta'1 \rightarrow B1(L2_1) \rightarrow B2 \rightarrow A2$ ardışık faz geçiş adımı pikleri diğer Cu bazlı şekil hafızalı alaşımlarda görülenlere benzer şekilde gözlemlendi. Ayrıca oda sıcaklığında alaşımda oluşan martensit fazların varlığı, alaşımın $CuK\alpha$ radyasyonu kullanılarak elde edilen XRD deseni ile ortaya çıkarılmıştır. Sonuçlar, yeni CuAlNiCr yüksek sıcaklık SHA'sının yüksek sıcaklık SHA uygulamalarında faydalı olabileceğini gösterdi.

Anahtar kelimeler: Yüksek sıcaklık şekil hafızalı alaşım, CuAlNiCr, martensitik dönüşüm, DSC, DTA.

* Corresponding Author: caksu@firat.edu.tr. ORCID Numbers of Authors: ¹ 0000-0002-6947-7590, ² 0000-0003-4255-0564, ⁴ 0000-0002-5151-4576

1. Introduction

As it is renowned, shape memory alloys (SMAs) [1,2], which are the second most commercial smart material group after piezoelectrics, have been extensively studied due to their unique and magic-like shape memory effect (SME), superelasticity and excellent damping properties. These properties made these materials very attractive and useful in many industrial and technological application fields such as actuator, automotive, medical, aerospace, robotics, construction, energy harvesting/converting, micro and nano electromechanic systems (M/NEMSs), textile, etc. [1–8].

In most of applications nickel-titanium (NiTi) SMAs [9,10] are used due to their superior shape memory and superelastic properties. Although NiTi SMAs have already been commercially used in numerous applications such as medical, aerospace or automotive [9,11–14], thus having great importance, the processability or machinability of these SMAs is relatively hard arising from their high ductility and deformation hardening, high chemical reactivity, low thermal conductivity and elastic modulus which results in poor surface finish and poor tool life [15,16]. But nearly ten times cheaper copper-based SMAs are thought as the nearest alternative to NiTi SMAs. The mechanism of shape memory effect property of SMAs depends on a solid-to-solid phase transition known as martensitic transformation. Martensitic transformations occur reversibly, atomically non-diffusional and isostatical between two different solid phases of SMAs called as the product phase or martensite (low-temperature phase) and the parent or austenite (high-temperature) phase [1]. A martensitic transformation can be occur when SMAs are exposed to external forces such as heat or electric/magnetic fields, the internal crystal lattice stresses occur by the external forces and these stresses impell the unit cell of a martensitic phase to change into the other unite cell of other martensitic phase. The total changes of all unit cells results a macro size shape change in SMAs that we can see. For example, when the temperature goes down to a critical level by cooling a NiTi SMA [9,17], a cubic lattice structure of austenite phase can transform into a martensite phase with a monoclinic lattice structure. This type of transformation from austenite to martensite is called as forward martensitic transformation. If temperature increase up again, at this time a reverse martensitic transformation occurs from martensite to austenite. The finish and start temperatures of reverse transformation (to parent phase) and forward (to martensite) transformation reactions, from the highest to the lowest, are ranked as $A_f > A_s > M_s > M_f$. Austenite phase becomes disordered after a critical $M_d (>A_f)$ temperature, and between A_f and M_d temperatures SMAs can exhibit superelasticity (pseudoelasticity) [18,19]. If SMAs are made deformed plastically by a mechanical force or stress (load) when they are in martensite phase, then if the load is removed away and they are exposed to heat, a reverse transformation take place and accordingly they return back to their pre-deformed original shape. But when SMAs are cooled down to the martensite temperature region they will not take the deformed shape back again and this is known as one-way shape memory effect (OWSME), and if some extra training treatments applied they can also show two-way shape memory effect (TWSME) [19].

NiTi, Cu-based (Cu-rich) and Fe-based (Fe-rich) SMA bases are three primary SMAs families. Among these, practically and industrially NiTi SMAs are the most preferred ones due to their superlative SE and SME features. But NiTi ones are much more expensive and arduously processable when compared to Cu-based ones showing better SE and SME than those of iron-based SMAs. For this reason, Cu-based SMAs are deemed as the nearest alternative to NiTi ones [20]. They are regarded as an alternative to be used in high-temperature operations and to other commercial SMAs because of their lesser production costs, too [20]. In spite of that Cu-based SMAs have been considerably investigated, they have still many issues to be overcome. Polycrystalline Cu-based SMAs exhibit some drawbacks such as their brittleness, and thermal instability or instability of martensite and austenite phases that affects transformation temperatures, hysteresis, strain recovery i.e. the shape memory properties. These problems stems mainly from the coarse grains, defects or types of martensite and are also highly dependent on the material production/processing history and the composition of these alloys [20]. A common way used to solve these problems is adding some grain-refiner elements like Be, Ni, Ti, Mg, Fe, Zn, Mn, Co, etc. in these SMAs [20–28]. The shape memory properties of the SMAs are extremely sensitive to their alloying compositions.

The shape memory effect mechanism of Cu-based SMAs depending on a martensitic transformation from usually a cubic β -phase (DO_3 or $L2_1$) which is high symmetry austenite (A) phase to a low symmetry martensite (M) phase. Martensite phase in Cu-based SMAs can mostly form in monoclinic (β'), orthorhombic (γ') or β'' (a mix of $\beta'+\gamma'$) forms depending on the alloy composition and also on the stress level of these alloys [5,20,27]. The low-temperature martensitic phases that can be found in these alloys are: $\alpha 1'$ (3R) observed for low Al contents, $\beta 1'$ (18R) for intermediate (9–14 wt.%) Al contents, and $\gamma 1'$ (2H) that is predominant in alloys with high Al contents [20,29].

The customary CuAlNi and CuZnAl SMAs and CuAlMn, CuAlFeMn and CuAlBe SMAs are the most salient Cu-based SMAs [1,20,24,30]. Cu-based SMAs, especially CuAlNi ones, are more capable than NiTi SMAs in terms of operating at high temperatures [5,31–44].

The effect of Cr element on CuAlNi SMAs has not been adequately studied before, except only three studies [45–47] on CuAlNiCr alloys, two of them with low martensitic transformation temperatures, and different alloying

compositions have been found in the literature. Also, there were some other works but they are not about shape memory aspects. The effects of adding chromium on CuAlNi, therefore, still have not understand well.

The addition of chromium (Cr) to copper-aluminum (Cu-Al) SMAs can significantly influence their microstructure, phase stability, and transformation temperatures [48–50], thereby enhancing their shape memory properties and expanding their potential applications. Notably, the addition of Cr to Cu-Al SMAs has been reported to enhance the thermal and compositional stability of the alloy, forming stable precipitates.

In this study, the quaternary CuAlNiCr with unprecedented 72.56Cu-22.34Al-4.34Ni-0.77Cr (at.%) composition was manufactured in an arc melter. The characteristic shape memory effect parameters were revealed by differential calorimetric DSC and DTA measurements and based analyses and calculations, and by structural XRD test.

2. Experimental

The CuAlNiCr high-temperature SMA was manufactured by melting the pellets obtained by pressing powder mixture of highly pure (%99.9) metal powders of Cu, Al, Ni, and Cr in a vacuum arc melter. After arc melting, the alloy obtained as-casted ingot was sliced as proper test samples. Then these test samples were homogenized at 900 °C for 1 h and immediately immersed (quenched) in iced-brine water (to form martensitic structure in the alloy by this rapid cooling). The DSC tests were performed out via using a Shimadzu-60A label DSC equipment at varied heating/cooling rates of 10, 15, 20 and 25 °C/min under inert (argon) gas with a constant flow rate of 100 ml/min for revealing thermally induced shape memory behavior. By using a Shimadzu DTG-60AH instrument the DTA test was performed out at a single 25 °C/min of heating/cooling rate between room temperature and high beta-phase temperature region under same inert gas condition to observe behavior of the alloy at high temperatures. The XRD pattern of the alloy was obtained in room conditions via using a Rigaku Miniflex 600 model X-ray diffractometer (by using CuK α wavelength rays) for revealing the formed martensite phases in the alloy matrix. The EDS analysis was made to determine the alloying composition of the CuAlNiCr alloy by using a SEM-Hitachi SU3500 instrument at room temperature.

3. Results and Discussion

The detected 72.56Cu-22.34Al-4.34Ni-0.77Cr (at.%) alloying composition of the CuAlNiCr HTSMA obtained by the EDS test result is given in Figure 1, and in Table 1. Average electron concentration per atom (e/a) ratio of the CuAlNiCr HTSMA was calculated as 1.49 by substituting the (at.%) -fractions of every metal element of the detected alloy composition in the formula [27] expressed as $e/a = \sum f_i \cdot v_i$, where f represents the (at.%) -fractions of the alloying elements and v refers to the corresponding valency (numbers) of these elements. Thus, the e/a ratio of the CuAlNiCr alloy was found as 1.49. This e/a parameter of the produced CuAlNiCr alloy is fall in between the e/a ratio range of 1.45-1.51 which range is regarded as a theoretical condition for copper-based alloys to exhibit most probably a shape memory effect [1,27]. Also, in this e/a ratio range Cu-based SMAs are expected to have two different martensite forms ($\beta 1'$ and $\gamma 1'$) together.

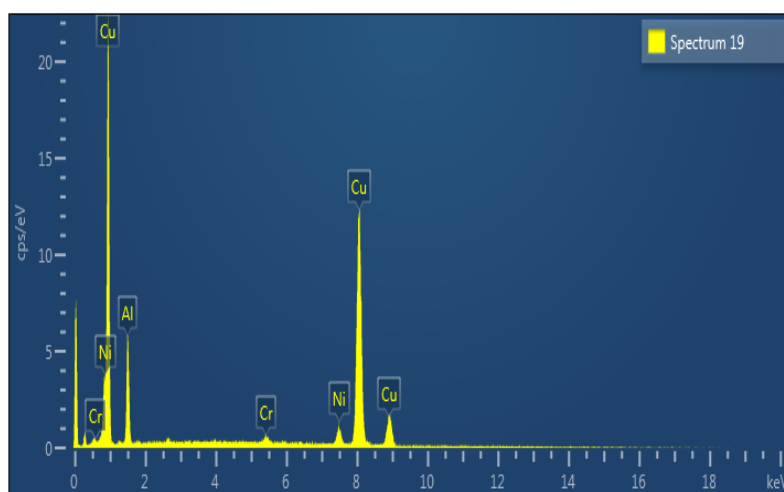


Figure 1. The EDS test result of the CuAlNiCr HTSMA.

Table 1. The EDS alloy composition of the CuAlNiCr HTSMA.

	Cu	Al	Ni	Cr
Atomic percentage (at.%)	72.56	22.34	4.34	0.77

The multi-curves DSC results each at different heating/cooling heating rate are given in Figure 2 show the formation of down endothermic and up exothermic solid-to-solid reaction peaks indicating the reversible martensitic phase transformations of the CuAlNiCr HTSMA. The cycling DSC heating/cooling curves taken at different 10 - 25 °C/min of rates show the highly stable reverse (martensite to austenite; M→A) transformation on heating fragments of these thermograms and the forward austenite to martensite (A→M) transitions on cooling fragments of these curves [18,27,51] due to very slightly changes of peak positions and no any peak splitting observed as occurrence of secondary phase transitions [52] on or near these peaks even after several time of DSC runnings at different heating/cooling rates.

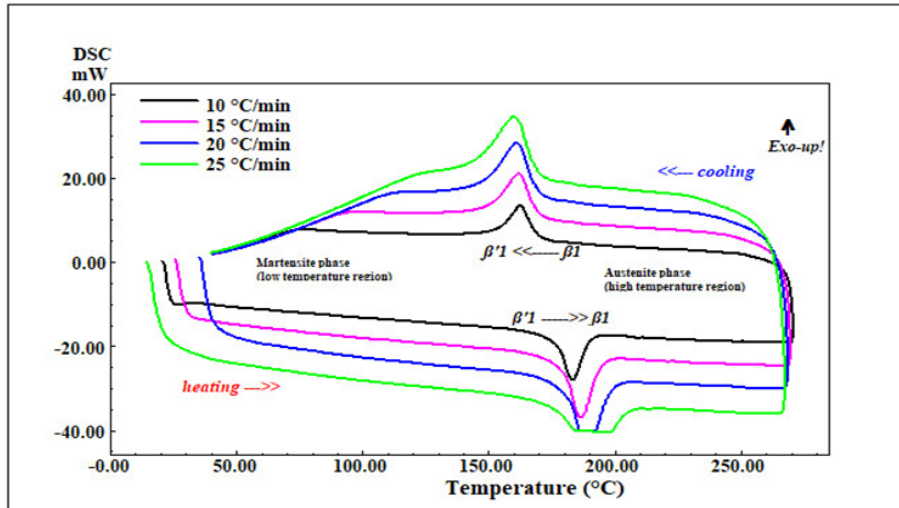


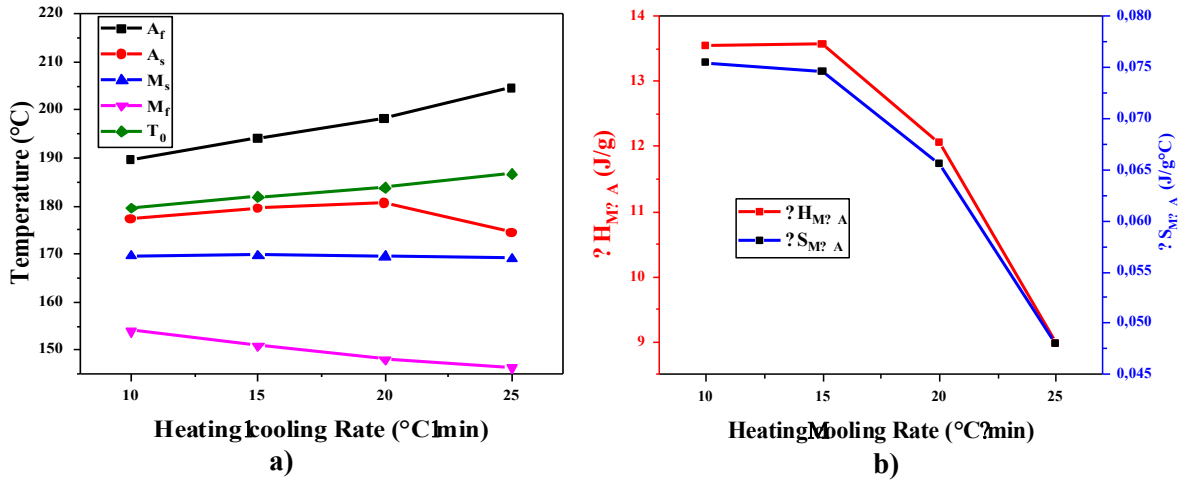
Figure 2. The multiple DSC curves of the CuAlNiCr HTSMA obtained at different heating/cooling heating rates.

The characteristic martensitic transformation temperatures and other thermodynamic parameter values of the CuAlNiCr HTSMA obtained from the DSC peak analyses data and calculations based on were given in Table 2. In this table, the thermal equilibrium temperature (T_0) parameter values, at where there is zero gap between the Gibbs (chemical) free energies of austenite and martensite phases, were determined by $T_0 = (A_f + M_s)/2$ formula [27]. And, the entropy change (ΔS) happened with M→A reactions were calculated by using the enthalpy ΔH change values in $\Delta S_{M \rightarrow A} = \Delta H_{M \rightarrow A} / T_0$ formula [27]. The high martensitic transformation temperatures of the produced CuAlNiCr alloy was found ranging in between 146.29 °C (the minimum M_f) and 204.45 °C (the maximum A_f) temperatures range which range is found higher than the range of 37.53 °C and 113.22 °C [45], -44.66 °C and -6.09 °C [46] reported in previous works. So, the transformation temperatures range determined in this work being much higher than those reported in previous works [45,46] is found as unique and the only high-temperatures range and thus the only high-temperature CuAlNiCr shape memory alloy, too.

Table 2. The characteristic temperatures of martensitic transformation and thermodynamic parameters of the fabricated CuAlNiCr HTSMA.

Heating/cooling rate (°C/min)	A _s (°C)	A _f (°C)	A _{max} (°C)	M _s (°C)	M _f (°C)	A _s -M _f (°C)	T ₀ (°C)	ΔH _{M→A} (J/g)	ΔS _{M→A} (J/g°C)
10	177.12	189.57	183.39	169.58	153.93	23.19	179.58	13.54	0.0754
15	179.38	194.00	186.54	169.63	150.89	28.49	181.82	13.57	0.0746
20	180.52	198.14	191.31	169.46	148.02	32.50	183.80	12.06	0.0656
25	174.42	204.45	197.57	168.93	146.29	28.13	186.69	8.97	0.0480
Avg.	177.86	196.54	189.70	169.40	149.78	28.08	182.97	12.04	0.0659

The transformation temperatures and thermodynamic parameters of CuAlNiCr HTSMA changing with heating/cooling rate were also displayed as plots given in Figure 3-a and -b. By the increase of heating/cooling rate, while A_f and T₀ temperatures are seen increased, M_f temperature is seen decreased, and the enthalpy and entropy change values of reverse transformation are both seen decreased. The faster heating, the lower volume of martensite allowed to transform to austenite. Because, for a fully transformation enough time keeping at same isostatic temperature (more like a small temperature interval) is needed, since martensitic transformations occur isostatically. When the heating rate is high the temperature goes up so rapidly leaving some of martensites untransformed behind. Some times, at much higher rates, a temperature lag (lag of A_f) occurs as a sign of late transformation of the rest un-transformed martensites [17].


Figure 3. The plots showing a) the transformation temperatures and b) kinetic parameters of CuAlNiCr HTSMA changing with heating/cooling rate.

The kinetic activation energy (E_a) is a determining parameter in formation of martensitic transformation reaction and crystallization of the alloy. Here, for the activation energy of the CuAlNiCr HTSMA the below-given Kissinger formula in eq. (1) [27,53] was used;

$$\frac{d\left[\ln\left(\frac{\phi}{T_m^2}\right)\right]}{d\left(\frac{1}{T_m}\right)} = -\frac{E_a}{R} \quad (1)$$

where; T_m is maximum austenite formation (M→A) peak temperature (A_{max}), ϕ is heating/cooling rate, R is the universal gas constant ($R=8.314$ J/mol.K). The plot of activation energy change of the reverse transformation of the CuAlNiCr HTSMA is given in Figure 4. The linear fitting-slope of this plot represents the left term of the Eq.1. By using slope value instead of the left term in Eq.1, the E_a activation energy value of the reverse martensitic phase transition of the produced CuAlNiCr HTSMA was computed as 102.55 kJ/mol.

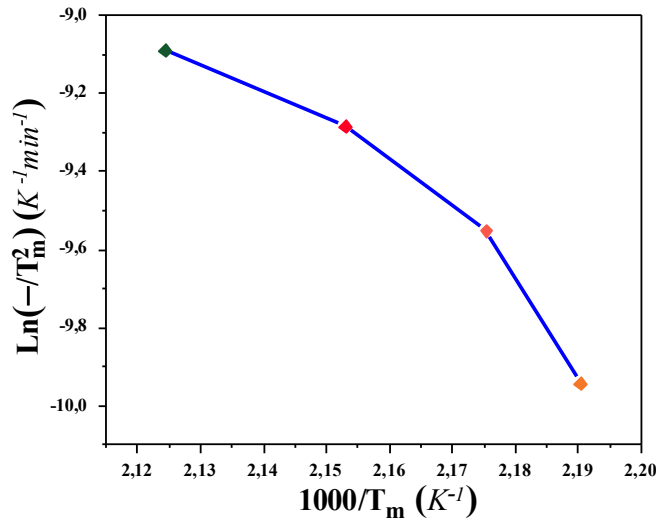


Figure 4. The activation energy change plot of the reverse martensitic transformation of the CuAlNiCr HTSMA.

The cyclic DTA curve taken at single 25 °C/min of heating/cooling rate given in Figure 5 shows the reverse and forward martensitic transformation peaks again and also the other thermally induced phase transitions reactions in the CuAlNiCr HTSMA at high temperatures. A phase transition chain observed on heating as follows: martensite (β_1') \rightarrow austenite (β_1 , $L2_1$) \rightarrow B2 (metastable cubic) \rightarrow precipitating \rightarrow eutectoid recomposition \rightarrow B2 (ordered cubic) \rightarrow A2 (disordered cubic) [1,27,51,54,55] and this phase transitions chain is seen common in Cu-based SMAs. The eutectoid point (this peak is seen formed at 500 °C circa on heating part, and vice versa on cooling part) indicates the dissolution of precipitations (that form before this peak) into β (or B2) phase. Here, the forward martensitic transformation ($\beta_1 \rightarrow \beta_1'$) peak is seen on cooling the CuAlNiCr alloy become smaller as compared with the sharp and large reverse one ($\beta_1' \rightarrow \beta_1$) seen on heating. The reason for this is that the alloy's composition or structure might have been some changed in some local domains when passing through the high temperature region of precipitating and eutectoid region. Precipitations occur by diffusion of atoms at high temperatures, and they disarrange some of martensitic structure, i.e. lead to a reduction of some shape memory capacity understood from the shrinking of transformation peak. By giving an extra heating of the CuAlNiCr HTSMA up to β -phase temperature region above its eutectoid point (the peak seen formed at 500 °C circa on heating part) and then by rapidly quenching the alloy from that high temperature can be done to bring the forward transformation peak (shape memory capacity) back to its normal size again.

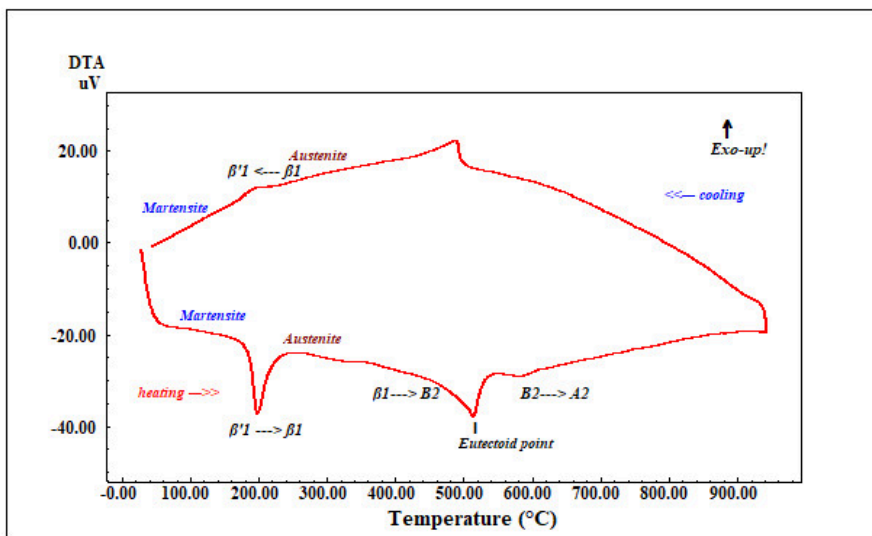


Figure 5. The DTA termogram of the CuAlNiCr HTSMA.

The XRD pattern of the CuAlNiCr HTSMA is given in Figure 6 and it shows the formed martensitic phases in the alloy at room temperature. Here, the main observed peak is $\beta 1'$ (122) martensite peak, and the others are also some $\beta 1'$ and some $\gamma 1'$ type martensite peaks [25,27,28,38,56–59]. The XRD pattern of the CuAlNiCr HTSMA shows the co-existence of monoclinic $\beta 1'$ (18R) and orthorhombic $\gamma 1'$ (2H) type martensite phases just as above-predicted over the e/a ratio of the alloy.

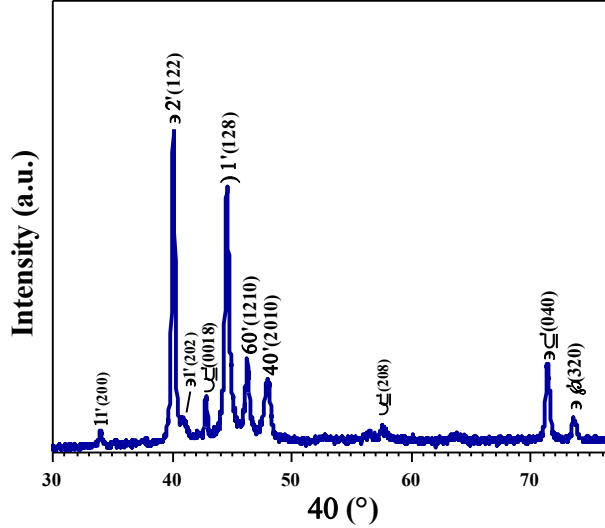


Figure 6. The XRD pattern of the CuAlNiCr HTSMA.

The mean size of the ordered (crystalline) domains, i.e. the Debye-Scherrer crystallite size (D) of the alloy was also calculated by using Debye-Scherrer formula [27] as below in (2);

$$D = \frac{0.9\lambda}{B_{1/2} \cos \theta} \quad (2)$$

where; λ refers to the used wavelength (CuK α radiation, $\lambda = 0.15406$ nm) of X-ray diffracted from the surface of the alloy in the XRD test, $B_{1/2}$ stands for the full width at half maximum (FWHM) value of the highest intensity peak, and θ represents the Bragg angle of the diffraction. The crystallite size D values were determined as 29.69 nm by using the FWHM value of the highest $\beta 1'$ (122) peak at the 2θ angle of 40.14°.

4. Conclusions

The quaternary CuAlNiCr HTSMA was manufactured successfully by arc melting technique and the shape memory effect characterization of the alloy was made by differential calorimetry (DSC, DTA) and structural (XRD, EDS) measurements.

The DSC results showed the powerful and stable reversible martensitic transformation peaks at the temperatures above 100 °C approximately between 150 °C and 200 °C, and also the DTA curve on heating showed the multi-step phase transitions chain of $\beta 1'$ (or $\beta 1' + \gamma 1'$) \rightarrow $\beta 1$ (L2₁) \rightarrow B2 \rightarrow A2 which is common to the Cu-based shape memory alloys. Heating up above eutectoid point can reduce the enthalpy change of martensitic transformation and shape memory effect capacity of the alloy due to some local compositional changes might have been originated from some residual precipitations and intermetallic phases emerging during the heating and some remaining during cooling back. In this case, an additional heating the alloy up to its high beta-phase temperature region and quenching will probably be the convenient remedy to entirely re-build the martensitic structure of shape memory mechanism in the alloy again.

The XRD result showed the co-existence of $\beta 1'$ and $\gamma 1'$ type martensites which constitutes the base crystallographic mechanism for the shape memory effect property of the CuAlNiCr HTSMA.

The obtained results showed that the new composition CuAlNiCr HTSMA can be useful in various HTSMA related applications. The results obtained in this study on CuAlNiCr HTSMA will help in research and development on Cu-based SMAs, CuAlNi SMAs and Cr incorporated CuAl-based SMAs which are demanded for their low cost and some relatively more practical fabrication ease than NiTi SMAs, also brings new literature

information that will be used by the researchers in their perspectives and in future works. Moreover, the next work can be done on the ternary CuAlCr alloy with more amount of Cr addition to see the effect of Cr on CuAl-base system and its shape memory and microstructure properties.

Acknowledgments

This research work is a part of thesis works of Gökhan İSTEK mastering in general physics in Physics Department, Science Faculty, Firat University. O.K. carrying out experiments and analysing and writing, İ.Ö. carrying out experiments and editing, G.İ. carrying out experiments, C.A.C. conceptualizing and carrying out experiments and editing.

References

- [1] Otsuka K, Wayman CM. Shape memory materials. Cambridge University Press; 1999.
- [2] Fernandes DJ, Peres R V., Mendes AM, Elias CN. Understanding the Shape-Memory Alloys Used in Orthodontics. *ISRN Dent* 2011;2011:1–6. <https://doi.org/10.5402/2011/132408>.
- [3] Muthukumarana S, Messerschmidt MA. Clothtiles: A prototyping platform to fabricate customized actuators on clothing using 3d printing and shape-memory alloys. *Conference on Human Factors in Computing Systems - Proceedings 2021*. <https://doi.org/10.1145/3411764.3445613>.
- [4] Concilio A, Antonucci V, Auricchio F, Lecce L, Sacco E (Eds.). Shape Memory Alloy Engineering. 2nd ed. Elsevier; 2021. <https://doi.org/10.1016/C2018-0-02430-5>.
- [5] Ma J, Karaman I, Noebe RD. High temperature shape memory alloys. *International Materials Reviews* 2010;55:257–315. <https://doi.org/10.1179/095066010X12646898728363>.
- [6] Rao A, Srinivasa AR, Reddy JN. Introduction to shape memory alloys. *SpringerBriefs in Applied Sciences and Technology* 2015:1–31. https://doi.org/10.1007/978-3-319-03188-0_1.
- [7] Hartl DJ, Lagoudas DC. Aerospace applications of shape memory alloys. *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part G: Journal of Aerospace Engineering* 2007;221:535–52. <https://doi.org/10.1243/09544100JAERO211>.
- [8] Fu YQ, Luo JK, Flewitt AJ, Huang WM, Zhang S, Du HJ, et al. Thin film shape memory alloys and microactuators. *Int J Computational Materials Science and Surface Engineering* 2009;2:208–26. <https://doi.org/10.1504/IJCMSSE.2009.027483>.
- [9] Mwangi JW, Nguyen LT, Bui VD, Berger T, Zeidler H, Schubert A. Nitinol manufacturing and micromachining: A review of processes and their suitability in processing medical-grade nitinol. *J Manuf Process* 2019;38:355–69. <https://doi.org/https://doi.org/10.1016/j.jmapro.2019.01.003>.
- [10] Kauffman GB. The Story of Nitinol: The Serendipitous Discovery of the Memory Metal and Its Applications. *The Chemical Educator* 1997;2:1–21. <https://doi.org/10.1007/s00897970111a>.
- [11] Kim WC, Lim KR, Kim WT, Park ES, Kim DH. Recent advances in multicomponent NiTi-based shape memory alloy using metallic glass as a precursor. *Prog Mater Sci* 2021;118. <https://doi.org/10.1016/j.pmatsci.2020.100756>.
- [12] Hite N, Sharar DJ, Trehern W, Umale T, Atli KC, Wilson AA, et al. NiTiHf shape memory alloys as phase change thermal storage materials. *Acta Mater* 2021;218. <https://doi.org/10.1016/j.actamat.2021.117175>.
- [13] Riccio A, Sellitto A, Ameduri S, Concilio A, Arena M. Shape memory alloys (SMA) for automotive applications and challenges. *Shape Memory Alloy Engineering: For Aerospace, Structural, and Biomedical Applications* 2021:785–808. <https://doi.org/10.1016/B978-0-12-819264-1.00024-8>.
- [14] Costanza G, Tata ME. Shape Memory Alloys for Aerospace, Recent Developments, and New Applications: A Short Review. *Materials* 2020;13. <https://doi.org/10.3390/ma13081856>.
- [15] Altas E, Gokkaya H, Karatas MA, Ozkan D. Analysis of surface roughness and flank wear using the taguchi method in milling of niti shape memory alloy with uncoated tools. *Coatings* 2020;10:1–17. <https://doi.org/10.3390/coatings10121259>.
- [16] Altas E, Altin Karatas M, Gokkaya H, Akinay Y. Surface Integrity of NiTi Shape Memory Alloy in Milling with Cryogenic Heat Treated Cutting Tools under Different Cutting Conditions. *J Mater Eng Perform* 2021;30:9426–39. <https://doi.org/10.1007/s11665-021-06095-3>.
- [17] Canbay CA, Karaduman O, Özkul İ. Lagging temperature problem in DTA/DSC measurement on investigation of NiTi SMA. *Journal of Materials Science: Materials in Electronics* 2020;31:13284–91. <https://doi.org/10.1007/s10854-020-03881-y>.
- [18] Babacan N, Pauly S, Gustmann T. Laser powder bed fusion of a superelastic Cu-Al-Mn shape memory alloy. *Mater Des* 2021;203. <https://doi.org/10.1016/j.matdes.2021.109625>.
- [19] Mohd Jani J, Leary M, Subic A, Gibson MA. A review of shape memory alloy research, applications and opportunities. *Mater Des* 2014;56:1078–113. <https://doi.org/10.1016/j.matdes.2013.11.084>.
- [20] Mazzer EM, Da Silva MR, Gargarella P. Revisiting Cu-based shape memory alloys: Recent developments and new perspectives. *J Mater Res* 2022;37:162–82. <https://doi.org/10.1557/s43578-021-00444-7>.
- [21] Sugimoto K, Kamei K, Matsumoto H, Komatsu S, Akamatsu K, Sugimoto T. Grain-refinement and the related phenomena in quaternary Cu-Al-Ni-Ti shape memory alloys. *Le Journal de Physique Colloques* 1982;43:C4-761-C4-766. <https://doi.org/10.1051/jphyscol:19824124>.

- [22] Yang J, Wang QZ, Yin FX, Cui CX, Ji PG, Li B. Effects of grain refinement on the structure and properties of a CuAlMn shape memory alloy. *Materials Science and Engineering A* 2016;664:215–20. <https://doi.org/10.1016/j.msea.2016.04.009>.
- [23] Sutou Y, Omori T, Yamauchi K, Ono N, Kainuma R, Ishida K. Effect of grain size and texture on pseudoelasticity in Cu-Al-Mn-based shape memory wire. *Acta Mater* 2005;53:4121–33. <https://doi.org/10.1016/j.actamat.2005.05.013>.
- [24] Dasgupta R. A look into Cu-based shape memory alloys: Present scenario and future prospects. *J Mater Res* 2014;29:1681–98. <https://doi.org/10.1557/jmr.2014.189>.
- [25] Najib ASM, Saud SN, Hamzah E. Corrosion Behavior of Cu–Al–Ni–xCo Shape Memory Alloys Coupled with Low-Carbon Steel for Civil Engineering Applications. *J Bio Tribocorros* 2019;5. <https://doi.org/10.1007/s40735-019-0242-8>.
- [26] Canbay CA, Karaduman O, Özkul İ. Investigation of varied quenching media effects on the thermodynamical and structural features of a thermally aged CuAlFeMn HTSMA. *Physica B Condens Matter* 2019;557:117–25. <https://doi.org/10.1016/j.physb.2019.01.011>.
- [27] Canbay CA, Karaduman O, Ünlü N, Baiz SA, Özkul İ. Heat treatment and quenching media effects on the thermodynamical, thermoelastical and structural characteristics of a new Cu-based quaternary shape memory alloy. *Compos B Eng* 2019;174:106940. <https://doi.org/10.1016/j.compositesb.2019.106940>.
- [28] Saud SN, Hamzah E, Abubakar T, Zamri M, Tanemura M. Influence of Ti additions on the martensitic phase transformation and mechanical properties of Cu-Al-Ni shape memory alloys. *J Therm Anal Calorim* 2014;118:111–22. <https://doi.org/10.1007/s10973-014-3953-6>.
- [29] Svirid AE, Kuranova NN, Lukyanov A V., Makarov V V., Nikolayeva N V., Pushin VG, et al. Influence of Thermomechanical Treatment on Structural-Phase Transformations and Mechanical Properties of the Cu–Al–Ni Shape-Memory Alloys. *Russian Physics Journal* 2019;61:1681–6. <https://doi.org/10.1007/s11182-018-1587-z>.
- [30] Canbay CA, Karaduman O, Ünlü N, Özkul İ. Study on Basic Characteristics of CuAlBe Shape Memory Alloy. *Brazilian Journal of Physics* 2021;51:13–8. <https://doi.org/10.1007/s13538-020-00823-1>.
- [31] Firstov GS, Van Humbeeck J, Koval YN. High-temperature shape memory alloys. *Materials Science and Engineering: A* 2004;378:2–10. <https://doi.org/10.1016/j.msea.2003.10.324>.
- [32] Motemani Y, Buenconsejo PJS, Ludwig A. Recent Developments in High-Temperature Shape Memory Thin Films. *Shape Memory and Superelasticity* 2015;1. <https://doi.org/10.1007/s40830-015-0041-0>.
- [33] Zhang X, Liu Q. Cu-Al-Ni-V high-temperature shape memory alloys. *Intermetallics (Barking)* 2018;92:108–12. <https://doi.org/10.1016/j.intermet.2017.10.001>.
- [34] Zhang X, Liu Q. Cu-Al-Ni-V high-temperature shape memory alloys. *Intermetallics (Barking)* 2018;92. <https://doi.org/10.1016/j.intermet.2017.10.001>.
- [35] Yang S, Su Y, Wang C, Liu X. Microstructure and properties of Cu-Al-Fe high-temperature shape memory alloys. *Mater Sci Eng B Solid State Mater Adv Technol* 2014;185:67–73. <https://doi.org/10.1016/j.mseb.2014.02.001>.
- [36] López-Ferreño I, Gómez-Cortés JF, Breczewski T, Ruiz-Larrea I, Nó ML, San Juan JM. High-temperature shape memory alloys based on the Cu-Al-Ni system: Design and thermomechanical characterization. *Journal of Materials Research and Technology* 2020;9:9972–84. <https://doi.org/10.1016/j.jmrt.2020.07.002>.
- [37] Van Humbeeck J. Shape memory alloys with high transformation temperatures. *Mater Res Bull* 2012;47:2966–8. <https://doi.org/10.1016/j.materresbull.2012.04.118>.
- [38] Zhang X, Liu QS. Influence of alloying element addition on Cu-Al-Ni high-temperature shape memory alloy without second phase formation. *Acta Metallurgica Sinica (English Letters)* 2016;29:884–8. <https://doi.org/10.1007/s40195-016-0467-1>.
- [39] Guilemany JM, Fernández J, Franch R, Benedetti A V., Adorno AT. A New Cu-Based SMA with Extremely High Martensitic Transformation Temperatures. *Le Journal de Physique IV* 1995;05:C2-361-C2-365. <https://doi.org/10.1051/jp4:1995255>.
- [40] Cheniti H, Bouabdallah M, Patoor E. High temperature decomposition of the β_1 phase in a Cu–Al–Ni shape memory alloy. *J Alloys Compd* 2009;476:420–4. <https://doi.org/10.1016/J.JALLCOM.2008.09.003>.
- [41] Karaduman O, Özkul İ, Altın S, Altın E, Bağlayan, Canbay CA. New Cu-Al based quaternary and quinary high temperature shape memory alloy composition systems. *AIP Conf Proc*, vol. 2042, American Institute of Physics Inc.; 2018. <https://doi.org/10.1063/1.5078902>.
- [42] Wang CP, Su Y, Yang SY, Shi Z, Liu XJ. A new type of Cu-Al-Ta shape memory alloy with high martensitic transformation temperature. *Smart Mater Struct* 2014;23. <https://doi.org/10.1088/0964-1726/23/2/025018>.
- [43] Karaduman O, Özkul İ, Canbay CA. Shape memory effect characterization of a ternary CuAlNi high temperature SMA ribbons produced by melt spinning method. *Advanced Engineering Science* 2021;1:26–33.
- [44] Canbay CA, Karaduman O, Ünlü N, Özkul İ, Çiçek MA. Energetic Behavior Study in Phase Transformations of High Temperature Cu–Al–X (X: Mn, Te, Sn, Hf) Shape Memory Alloys. *Transactions of the Indian Institute of Metals* 2021. <https://doi.org/10.1007/s12666-021-02241-6>.
- [45] Zare M, Ketabchi M. Effect of chromium element on transformation, mechanical and corrosion behavior of thermomechanically induced Cu–Al–Ni shape-memory alloys. *J Therm Anal Calorim* 2017;127:2113–23. <https://doi.org/10.1007/s10973-016-5839-2>.
- [46] Teixeira CA, Coelho RE, Lima PC, Nascimento CS, Mendonça ES, Murilo S, et al. THE EFFECT OF CHROMIUM ON MICROSTRUCTURE OF CUALNI SHAPE MEMORY ALLOY. 24th International Conference on Metallurgy and Materials, Brno, Czech Republic, EU, 2015.
- [47] Koo H-S, Chen H, Chen F-H. Microstructural Characteristics and Shape Memory Effect of Rapidly Quenched Cu-Al-Ni-Cr Alloy. *MRS Proceedings* 1991;246:201. <https://doi.org/10.1557/PROC-246-201>.

- [48] IJIMA M, ENDO K, OHNO H, MIZOGUCHI I. Effect of Cr and Cu Addition on Corrosion Behavior of Ni-Ti Alloys. *Dent Mater J* 1998;17:31–40. <https://doi.org/10.4012/dmj.17.31>.
- [49] Amer SM, Glavatskikh M V., Barkov RYu, Loginova IS, Pozdniakov A V. Effect of Cr on the Microstructure and Mechanical Properties of the Al-Cu-Y-Zr Alloy. *Metals (Basel)* 2023;13:349. <https://doi.org/10.3390/met13020349>.
- [50] da M. Candido GV, de A. Melo TA, De Albuquerque VHC, Gomes RM, de Lima SJG, Tavares JMRS. Characterization of a CuAlBe Alloy with Different Cr Contents. *J Mater Eng Perform* 2012;21:2398–406. <https://doi.org/10.1007/s11665-012-0159-6>.
- [51] Canbay CA, Karaduman O. The photo response properties of shape memory alloy thin film based photodiode. *J Mol Struct* 2021;1235:130263. <https://doi.org/10.1016/J.MOLSTRUC.2021.130263>.
- [52] Pinto RDA, Silva RAG. Mirrored symbols, opposite effects: Impact of Ga and Ag additions on the martensite decomposition of the Cu₈₁Al₁₉ alloy. *Mater Today Commun* 2023;37:107280. <https://doi.org/10.1016/j.mtcomm.2023.107280>.
- [53] Kissinger HE. Reaction Kinetics in Differential Thermal Analysis. *Anal Chem* 1957;29:1702–6. <https://doi.org/10.1021/ac60131a045>.
- [54] Prado MO, Decorte PM, Lovey F. Martensitic transformation in Cu-Mn-Al alloys. *Scripta Metallurgica et Materialia* 1995;33. [https://doi.org/10.1016/0956-716X\(95\)00292-4](https://doi.org/10.1016/0956-716X(95)00292-4).
- [55] Chentouf SM, Bouabdallah M, Gachon JC, Patoor E, Sari A. Microstructural and thermodynamic study of hypoeutectoidal Cu-Al-Ni shape memory alloys. *J Alloys Compd* 2009;470:507–14. <https://doi.org/10.1016/j.jallcom.2008.03.009>.
- [56] Saud SN, Hamzah E, Abubakar T, Bakhsheshi-Rad HR. Microstructure and corrosion behaviour of Cu-Al-Ni shape memory alloys with Ag nanoparticles. *Materials and Corrosion* 2015;66:527–34. <https://doi.org/10.1002/maco.201407658>.
- [57] Chentouf SM, Bouabdallah M, Gachon J-C, Patoor E, Sari A. Microstructural and thermodynamic study of hypoeutectoidal Cu-Al-Ni shape memory alloys. *J Alloys Compd* 2009;470. <https://doi.org/10.1016/j.jallcom.2008.03.009>.
- [58] Karaduman O, Canbay CA. Investigation of CuAlNi Shape Memory Alloy Doped with Graphene. *Journal of Materials and Electronic Devices* 2021;3:8–14.
- [59] Saud SN, Hamzah E, Abubakar T, Bakhsheshi-Rad HR, Zamri M, Tanemura M. Effects of Mn Additions on the Structure, Mechanical Properties, and Corrosion Behavior of Cu-Al-Ni Shape Memory Alloys. *J Mater Eng Perform* 2014;23:3620–9. <https://doi.org/10.1007/s11665-014-1134-1>.

Investigating Solutions of the Noyes-Whitney Dynamic Equation via Proportional Fractional Derivative

Tuba GULSEN^{1*}, Melek DÖNMEZ²

^{1,2} Department of Mathematics, Faculty of Science, Firat University, Elazığ, Türkiye

*¹ tyalcin@firat.edu.tr, ² melekulas.mu@hotmail.com

(Geliş/Received: 19/02/2024;

Kabul/Accepted: 22/03/2024)

Abstract: The dynamics of solid material dissolving in a solvent are fundamentally described by the Noyes-Whitney equation. For the purpose of simulating intricate processes with memory effects and non-local behaviors, fractional calculus offers a strong foundation. We explore the effects of memory and non-locality on dissolution kinetics by solving the Noyes-Whitney equation using fractional derivatives. By means of mathematical analysis, we provide insights into the dissolving processes in chemical engineering and pharmaceutical applications by clarifying the behavior of the Noyes-Whitney equation with proportional fractional derivative. In this study, after discussing the characteristics and theories of the proportional fractional derivative on a time scale, we solve the proportional fractional Noyes-Whitney dynamic equation in the presence of the initial condition and give several examples on various time scales via the proportional fractional derivative.

Key words: Noyes-Whitney dynamic equation, fractional calculus, proportional fractional derivative.

Noyes-Whitney Dinamik Denkleminin Çözümlerinin Oransal Kesirli Türeve Göre İncelenmesi

Öz: Katı maddenin bir çözücü içinde çözünmesinin dinamiği temel olarak Noyes-Whitney denklemi ile tanımlanır. Karmaşık süreçleri hafıza etkileri ve yerel olmayan davranışlarla simüle etmek amacıyla kesirli analiz güçlü bir temel sunar. Noyes-Whitney denklemini kesirli türevler kullanarak çözerek hafızanın ve yerel olmamanın çözünme kinetiği üzerindeki etkilerini araştırıyoruz. Matematiksel analiz yoluyla, Noyes-Whitney denkleminin orantılı kesirli türevle davranışını açıklığa kavuşturarak kimya mühendisliği ve farmasötik uygulamalardaki çözünme süreçlerine ilişkin bilgiler sağlıyoruz. Bu çalışmada oransal kesirli türevin özelliklerini ve teorilerini zaman ölçeğinde verdikten sonra oransal kesirli Noyes-Whitney dinamik denklemini başlangıç koşulunun varlığında ve oransal kesirli türev üzerinden çeşitli zaman ölçeklerinde birkaç örnek vererek çözüyoruz.

Anahtar kelimeler: Noyes-Whitney dinamik denklemi, kesirli hesap, oransal kesirli türev.

1. Introduction

Numerous industrial and scientific operations depend heavily on the kinetics of a solid substance's dissolution in a solvent. Based on variables including surface area, diffusion coefficient, and concentration gradient, the Noyes-Whitney equation [15,23,26,30,32,33] offers a standard model for explaining dissolution rates. We introduce a proportional fractional derivative to the Noyes-Whitney equation in this study, inspired by the non-local behaviors and memory effects found in dissolution events.

The classical fractional derivative operators [1,10,11,17,19,24,25,27,34] are extended by the new conformable fractional derivative, named proportional fractional derivative [4,5,18], with parameters κ_0 and κ_1 . If P^0 is the unit operator and P^1 is the classical differential operator, then the differential operator P^β is called a proportional derivative where $\beta \in [0,1]$. In order to overcome some constraints of the current fractional calculus operators and offer a more adaptable framework for characterizing the behavior of complex systems with fractional-order dynamics, the conformable fractional derivative was developed.

With respect to parameters κ_0 and κ_1 , the proportional fractional derivative is defined as follows:

Definition 1.1 [5] Assume that $\beta \in [0,1]$, $\kappa_0, \kappa_1: [0,1] \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_0^+$ are continuous functions and that

* Sorumlu yazar: tyalcin@firat.edu.tr. Yazarların ORCID Numarası: ¹0000-0002-2288-8050, ²0009-0002-2750-5212

$$\begin{cases} \lim_{\beta \rightarrow 0^+} \kappa_0(\beta, t) = 0, & \lim_{\beta \rightarrow 0^+} \kappa_1(\beta, t) = 1, \\ \lim_{\beta \rightarrow 1^-} \kappa_0(\beta, t) = 1, & \lim_{\beta \rightarrow 1^-} \kappa_1(\beta, t) = 0, \\ \kappa_0(\beta, t) \neq 0, \beta \in (0,1], & \kappa_1(\beta, t) \neq 0, \beta \in [0,1), \end{cases} \quad (1.1)$$

are true. In this situation, if the function φ is differentiable at t and $\varphi' = \frac{d}{dt}\varphi$, then the differential operator P^β defined by

$$P^\beta \varphi(t) = \kappa_1(\beta, t)\varphi(t) + \kappa_0(\beta, t)\varphi'(t), \quad (1.2)$$

is said to be proportional.

It is possible to modify the behavior and characteristics of the proportional fractional derivative operator by varying the parameters κ_0 and κ_1 . With respect to linearity, commutativity, and the chain rule, the proportional fractional derivative with parameters κ_0 and κ_1 inherits some of the beneficial characteristics of conventional fractional derivatives. Furthermore, when modeling complicated systems [8,31] with fractional-order dynamics, it provides increased flexibility and adaptability. There are several applications of this fractional derivative in the domains of signal processing, physics, engineering, biology, and finance [3,7,9,16,21,22,28]. Among the phenomena displaying fractional-order behavior include viscoelasticity, anomalous diffusion, fractional-order control systems, and so on. The features and behavior of this derivative are investigated through mathematical modeling and analysis, utilizing experimental validation, numerical simulations, and analytical techniques. The fractional derivative operator can be tailored to the unique properties of the system under study because to the flexibility offered by the parameters κ_0 and κ_1 . In comparison to conventional fractional calculus operators, the proportional fractional derivative with parameters κ_0 and κ_1 offers greater flexibility and versatility, making it a useful tool for characterizing and comprehending the dynamics of complex systems with fractional-order behavior.

A time scale \mathbb{T} is a closed, nonempty subset of the real numbers that denotes the domain of evolution of a dynamic process. It offers a comprehensive framework for researching dynamic processes and systems that change throughout different kinds and durations of time. Time scales having irregular or non-uniform time intervals can be modeled using continuous, discrete, or hybrid time scales. Since its introduction by Stefan Hilger in 1988 [20], time scale calculus has grown to be an essential tool for the study of dynamic systems with a wide range of temporal features. Numerous disciplines, including engineering, physics, biology, economics, and finance, can benefit from the use of time scale calculus. It is applied to population dynamics, mathematical biology, control theory, signal processing, and other fields to model and understand dynamic systems.

A basic equation used to characterize the rate at which a solid material dissolves into a solvent is the Noyes-Whitney equation, sometimes referred to as the Noyes-Whitney equation of dissolution kinetics. It offers a numerical connection between the dissolution rate and other process-influencing variables.

The aim of the study is to obtain analytical solutions of the fractional derivative Noyes-Whitney Dynamic Equation with proportional delay. The formula for the Noyes-Whitney problem is

$$\frac{dR}{dt} = \delta(R_s - R), \quad R(0) = 0. \quad (1.3)$$

The solubility of the substance, or the concentration of its saturated solution, is represented by R_s ; the concentration at the expiration of the time t is represented by R ; and δ is a constant. This indicates that the solution profile, as derived from the integration of Eq. (1.3), is exponential and reaches the plateau value R_s in an indefinite amount of time:

$$R = R_s(1 - e^{-\delta t}). \quad (1.4)$$

In this article, we consider the proportional fractional Noyes-Whitney dynamic equation

$$P^\beta R(t) = \delta(R_s - R)(t). \quad (1.5)$$

Firstly, we will give some properties and theories about the proportional fractional derivative on a time scale, and then we will find the solution of Eq. (1.5) with the initial condition and give some examples on different time scales.

2. Preliminaries

Some basic definitions and features of proportional fractional calculus theories will be covered in this part. Firstly, let us denote on a time scale \mathbb{T} by μ , ρ and σ the graininess function, the backward and forward jump operators, respectively, and additionally note that $\mathbb{T}^k = \mathbb{T} - \{m\}$ if there is a maximum m point of \mathbb{T} ; else, $\mathbb{T}^k = \mathbb{T}$. Detailed information about time scale calculation can be found in [2,6,12-15,23,26,30,33].

The proportional delta derivative of the function $\varphi : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$ of order $\beta \in [0, 1]$ at point $t \in \mathbb{T}^k$ will now be defined.

Let us define

$$\mathfrak{S}(\mathbb{T}) = \{ \varphi : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R} : P^\beta \varphi(t) \text{ exists and is finite for all } t \in \mathbb{T}^k \},$$

as the collection of all proportional delta differentiable functions [29].

Theorem 2.1 [29] Let $\varphi : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$ be a function, $t \in \mathbb{T}^k$; κ_0 and κ_1 be continuous functions that fulfill the conditions (1.1). In this case

$$P^\beta \varphi(t) = \kappa_0(\beta, t) \varphi^\Delta(t) + \kappa_1(\beta, t) \varphi(t), \quad (2.1)$$

defines the β -th order proportional derivative of φ at point t where $\beta \in [0, 1]$.

Lemma 2.2 [29] If $\varphi_1, \varphi_2 : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$ are proportional delta differentiable at the point $t \in \mathbb{T}^k$ and κ_0 and κ_1 satisfy the conditions (1.1) and are continuous functions, then the following properties are provided:

- (i) $P^\beta [\rho \varphi_1 + \zeta \varphi_2] = \rho P^\beta [\varphi_1] + \zeta P^\beta [\varphi_2]$, all $\rho, \zeta \in \mathbb{R}$;
- (ii) $P^\beta [\varphi_1 \varphi_2] = \varphi_1^\sigma P^\beta [\varphi_2] + P^\beta [\varphi_1] \varphi_2 - \varphi_1^\sigma \varphi_2 \kappa_1(\beta, \cdot)$;
- (iii) $D^\alpha \left[\frac{\varphi_1}{\varphi_2} \right] = \frac{P^\beta [\varphi_1] \varphi_2^\sigma - \varphi_1 P^\beta [\varphi_2]}{\varphi_2 \varphi_2^\sigma} + \frac{\varphi_1^\sigma}{\varphi_2^\sigma} \kappa_1(\beta, \cdot)$, $\varphi_2 \varphi_2^\sigma \neq 0$.

Definition 2.3 [29] Let $\beta \in [0, 1]$ and $\kappa_0, \kappa_1 : [0, 1] \times \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}_0^+$ be continuous functions that fulfill (1.1). $p : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$ is regarded as being β -regressive if the requirement

$$1 + \frac{p(\tau) - \kappa_1(\beta, \tau)}{\kappa_0(\beta, \tau)} \mu(\tau) \neq 0, \quad \text{all } t \in \mathbb{T}^k,$$

is hold. The collection of all β -regressive and rd-continuous functions on \mathbb{T} is represented by $\mathfrak{R}_\beta = \mathfrak{R}_\beta(\mathbb{T})$.

Definition 2.4 [29] Let $\beta \in (0, 1]$, $p \in \mathfrak{R}_\beta$. Assume that κ_0, κ_1 are continuous functions and $p/\kappa_0, \kappa_1/\kappa_0$ delta integrable functions on \mathbb{T} , and that (1.1) is satisfied.

$$\tilde{E}_p(t, s) = \exp \left[\int_s^t \frac{1}{\mu(\tau)} \text{Log} \left(1 + \frac{p(\tau) - \kappa_1(\beta, \tau)}{\kappa_0(\beta, \tau)} \mu(\tau) \right) \Delta \tau \right], \quad (2.2)$$

$$\tilde{E}_0(t, s) = \exp \left[\int_s^t \frac{1}{\mu(\tau)} \text{Log} \left(1 - \frac{\kappa_1(\beta, \tau)}{\kappa_0(\beta, \tau)} \mu(\tau) \right) \Delta \tau \right], \quad s, t \in \mathbb{T},$$

defines the proportional exponential function on \mathbb{T} for operator P^β , where Log is the fundamental logarithm function.

$$\tilde{E}_p(t, s) = \exp \left[\int_s^t \left(\frac{p(\tau) - \kappa_1(\beta, \tau)}{\kappa_0(\beta, \tau)} \right) \Delta \tau \right], \quad \mu(t) = 0, \quad (2.3)$$

Definition 2.5 [29] Let $p : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$ and $\beta \in (0, 1]$. Let us use \mathfrak{R}_β^+ to define all positive β -regressive components of \mathfrak{R}_β , that is,

$$\mathfrak{R}_\beta^+ = \left\{ p \in \mathfrak{R}_\beta : 1 + \frac{p(\tau) - \kappa_1(\beta, \tau)}{\kappa_0(\beta, \tau)} \mu(\tau) > 0, \text{ all } t \in \mathbb{T} \right\}.$$

Theorem 2.6 [29] If $p \in \mathfrak{R}_\beta^+$ and $\beta \in (0, 1]$, the following properties are true:

- (i) $\tilde{E}_p(\sigma(t), s) = \left(1 + \frac{p(t) - \kappa_1(\beta, t)}{\kappa_0(\beta, t)} \mu(t) \right) \tilde{E}_p(t, s)$;

$$(ii) \tilde{E}_p(t, s) = \frac{1}{\tilde{E}_p(s, t)};$$

$$(iii) \tilde{E}_p(t, s)\tilde{E}_p(s, r) = \tilde{E}_p(t, r);$$

$$(iv) \tilde{E}_p^\Delta(t, s) = \left(\frac{p(t) - \kappa_1(\beta, t)}{\kappa_0(\beta, t)} \right) \tilde{E}_p(t, s).$$

Lemma 2.7 [29] Let $\beta \in (0, 1]$ and $p \in \mathfrak{R}_\beta$. For fixed $s \in \mathbb{T}$,

$$P^\beta[\tilde{E}_p(\cdot, s)] = p(t)\tilde{E}_p(\cdot, s),$$

and for the proportional exponential function \tilde{E}_0 ,

$$P^\beta \left[\int_a^t \frac{\varphi(\tau)\tilde{E}_0(t, \sigma(\tau))}{\kappa_0(\beta, \tau)} \Delta\tau \right] = \varphi(t). \quad (2.4)$$

Definition 2.8 [29] Assume that $\varphi \in C_{rd}(\mathbb{R})$, $\beta \in (0, 1]$, and $t_0 \in \mathbb{T}$. The indefinite proportional integral (anti derivative) is defined as

$$\int P^\beta \varphi(t) \Delta_\alpha \tau = \varphi(t) + c\tilde{E}_0(t, t_0), \quad \forall t \in \mathbb{T}, c \in \mathbb{R},$$

with respect to Lemma 2.7

$$\int_a^t \varphi(\tau)\tilde{E}_0(t, \sigma(\tau)) \Delta_\beta \tau = \int_a^t \frac{\varphi(\tau)\tilde{E}_0(t, \sigma(\tau))}{\kappa_0(\beta, \tau)} \Delta\tau, \quad \Delta_\beta \tau = \frac{1}{\kappa_0(\beta, \tau)} \Delta\tau, \quad (2.5)$$

describes the indefinite proportional integral (anti derivative) of φ on $[a, b]_{\mathbb{T}}$.

Lemma 2.9 [29] Let $\beta \in (0, 1]$, $\varphi \in C_{rd}(\mathbb{R})$, and κ_0, κ_1 be continuous functions and satisfy (1.1). Then,

$$P^\beta \left[\int_a^t \varphi(\tau)\tilde{E}_0(t, \sigma(\tau)) \Delta_\beta \tau \right] = \varphi(t). \quad (2.6)$$

Lemma 2.10 [29] If $\varphi \in \mathfrak{Z}(\mathbb{T})$,

$$\int_a^t P^\beta [\varphi(\tau)] \tilde{E}_0(t, \sigma(\tau)) \Delta_\beta \tau = [\varphi(\tau) \tilde{E}_0(t, \sigma(\tau))]_{\tau=a}^t.$$

Definition 2.11 [4] It is assumed that $\varphi : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{C}$ is regulated. Afterward, for each $g \in H_\beta(f)$, where $H_\beta(f)$ is the set of all complex numbers that fulfill

$$\kappa_0 + f^\sigma g(\mu - \kappa_1) \neq 0, \quad g - \kappa_1 \in \mathfrak{R}_\beta,$$

$$h = -gf^\sigma \left(1 + \mu \frac{h - \kappa_1}{\kappa_0} \right),$$

the proportional fractional Laplace transform of φ is given as

$$L_\beta(\varphi)(u) = \int_0^\infty \varphi(u)f^\sigma(u)\tilde{E}_h(t, 0) \Delta_{\beta, \infty} \tau.$$

Theorem 2.12 [4] Assume that $\varphi_1, \varphi_2 : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{C}$ are regulated; $\gamma_1, \gamma_2 \in \mathbb{C}$. Thus, for $u \in H_\beta(\varphi_1) \cap H_\beta(\varphi_2)$,

$$L_\beta(\gamma_1\varphi_1 + \gamma_2\varphi_2)(u) = \gamma_1 L_\beta(\varphi_1)(u) + \gamma_2 L_\beta(\varphi_2)(u).$$

Lemma 2.13 [4] (i) $L_\beta(1)(u) = \frac{1}{u} \tilde{E}_0(\infty, 0)$, $u \in H_\beta(1)$,

(ii) $L_\beta(\tilde{E}_q(\infty, 0)) = \frac{\tilde{E}_0(\infty, 0)}{u-q}$.

3. Main Results

Using the Laplace transform, solutions of the proportional fractional Noyes-Whitney problem

$$\begin{cases} P^\beta R(t) = \delta(R_s - R)(t), \\ R(0) = R_0, \end{cases} \quad (3.1)$$

$$(3.2)$$

for various time scales will be found in this section.

Theorem 3.1 The solutions of the proportional fractional Noyes-Whitney problem (3.1)-(3.2) is

$$R(t) = R_s + (R_0 - R_s) \tilde{E}_{-\delta}(t, 0), \quad (3.3)$$

where $R_s(t) = R_s$.

Proof: Using the initial condition (3.2) and the proportional fractional Laplace transform of both sides of Eq. (3.1) can result in the discovery that

$$\begin{aligned} L_\beta(P^\beta R)(u) &= L_\beta(\delta(R_s - R))(u) \\ &= \delta(R_s - R) L_\beta(1)(u) \\ &= \delta R_s L_\beta(1)(u) - \delta L_\beta(R)(u), \end{aligned}$$

and then using lemma 2.13

$$u L_\beta(R)(u) - R_0 \tilde{E}_0(\infty, 0) = \delta R_s \frac{\tilde{E}_0(\infty, 0)}{u} - \delta L_\beta(R)(u),$$

$$L_\beta(R)(u) = \frac{\delta R_s + R_0 u}{u(u + \delta)} \tilde{E}_0(\infty, 0),$$

$$= \left(\frac{R_s}{u} + \frac{R_0 - R_s}{u + \delta} \right) \tilde{E}_0(\infty, 0).$$

By applying the inverse proportional fractional Laplace transform to both sides,

$$R(t) = R_s + (R_0 - R_s) \tilde{E}_{-\delta}(t, 0),$$

is found.

Example 3.2 Let $\mathbb{T} = \mathbb{Z}$, $\kappa_1(\beta, t) = (1 - \beta)3^{\beta/2}$, $\kappa_0(\beta, t) = \beta 3^{(1-\beta)/2}$. In this case, the solution of the problem

$$\begin{cases} P^{1/2} R(t) = -\frac{3}{2} (R_s - R)(t), \\ R(0) = R_0, \end{cases} \quad (3.4)$$

$$(3.5)$$

is

$$R(t) = R_s + (R_0 - R_s) \exp[t \text{Log} 2].$$

Solution Since $\mu(t) = 1$, from the definition of the proportional fractional exponential function (4), we have

$$\begin{aligned} \tilde{E}_{-\delta}(t,0) &= \exp \left[\int_0^t \text{Log} \left(1 - \frac{-\frac{3}{2} + \frac{3}{2}}{\frac{3}{2}} \right) \Delta u \right] \\ &= \exp \left[\int_0^t \text{Log} 2 \Delta u \right] \\ &= \exp \left[\text{Log} 2 \sum_0^{t-1} 1 \right] \\ &= \exp [t \text{Log} 2]. \end{aligned}$$

Hence, the solution of (3.4)-(3.5) is given that

$$R(t) = R_s + (R_0 - R_s) \exp [t \text{Log} 2].$$

Example 3.3 Let $\mathbb{T} = 3^{\mathbb{N}^0}$, $\kappa_1(\beta, t) = (1 - \beta)$, $\kappa_0(\beta, t) = \beta t^{\frac{3\beta}{2}}$. In this case, the solution of the problem is:

$$\begin{cases} P^{1/3} R(t) = -(R_s - R)(t), & (3.6) \\ R(1) = R_1, & (3.7) \end{cases}$$

$$R(t) = R_s + (R_1 - R_s) 3^k.$$

Solution: Since $\mu(t) = 2t$, we get

$$\begin{aligned} \tilde{E}_{-\delta}(t,1) &= \exp \left[\int_s^t \frac{1}{2u} \text{Log} \left(1 - \frac{-1 + \frac{1}{3}}{\frac{2}{3}t} 2t \right) \Delta u \right] \\ &= \exp \left[\int_0^t \frac{1}{2u} \text{Log} 3 \Delta u \right] \\ &= \exp \left[\text{Log} 3 \sum_1^{t/3} 1 \right] \\ &= \exp \left[\text{Log} 3 \sum_{3^0}^{3^{k-1}} 1 \right] \\ &= \exp [k \text{Log} 3], \\ &= 3^k, \quad t = 3^k, \quad k \in \mathbb{N}, \end{aligned}$$

and the solution can be obtained as

$$R(t) = R_s + (R_1 - R_s) 3^k.$$

4. Conclusion

Following a discussion of the properties and theories of the proportional fractional derivative on a time scale, we solve the proportional fractional Noyes-Whitney dynamic equation in this study while the initial condition is present. We then provide multiple examples using the proportional fractional derivative on different time scales. We provide light on the behavior of the Noyes-Whitney equation with proportional fractional derivative, so offering insights into dissolving processes in chemical engineering and medicinal applications.

Acknowledgements

This research is a part of the second author's master's thesis, which is carried out at Firat University, Türkiye.

References

- [1] Abdeljewad T. On conformable fractional calculus. *J Comput Appl Math* 2015; 279: 57–66.
- [2] Agarwal R, Bohner M, O'Regan D, Peterson A. Dynamic equations on time scales: a survey. *J Comput Appl Math* 2002; 141(1-2): 1-26.
- [3] Alkan A. Improving homotopy analysis method with an optimal parameter for time-fractional Burgers equation. *Karamanoğlu Mehmetbey Univ J Engin Natural Sci* 2022; 4(2), 117-134.
- [4] Anderson DR, Georgiev SG. *Conformable Dynamic Equations on Time Scales*. Chapman and Hall/CRC, 2020.
- [5] Anderson DR, Ulness DJ. Newly defined conformable derivatives. *Adv Dyn Syst Appl* 2015; 10(2): 109-137.
- [6] Aulbach B, Hilger S. A unified approach to continuous and discrete Dynamics. *Qual Theory Differ Equ* (Szeged, 1988), 37–56. Colloq Math Soc János Bolyai, 53 North-Holland, Amsterdam, 1990.
- [7] Avcı HH, Anaç H. The New Conformable methods to solve conformable time-fractional generalized Burgers equation with proportional delay. *Erciyes Univ Inst Sci Tech J Sci* 2023; 39(2), 315-329.
- [8] Bekiryazıcı Z, Merdan M, Kesemen T, Khaniyev T. Mathematical modeling of biochemical reactions under random effects. *TJMCS* 2016; 5, 8-18.
- [9] Bektaş U, Anaç H. Q-homotopy Shehu analysis transform method of time-fractional coupled Burgers equations. *Eskişehir Technical Univ J Sci Tech A-Appl Sci Eng* 2023; 24(3), 177-191.
- [10] Benkhettou N, Brito da Cruz AMC, Torres DFM. A fractional calculus on arbitrary time scales: Fractional differentiation and fractional integration. *Signal Process* 2015; 107: 230– 237.
- [11] Benkhettou N, Hassani S, Torres, DFM. A conformable fractional calculus on arbitrary time scales. *J King Saud Univ Sci* 2016; 28(1): 93-98.
- [12] Bohner M, Peterson A. *Dynamic equations on time scales, An introduction with applications*. Boston, MA: Birkhauser, 2001.
- [13] Bohner M, Peterson A. *Advances in Dynamic Equations on Time Scales*. Boston: Birkhauser, 2004.
- [14] Bohner M, Svetlin G. *Multivariable dynamic calculus on time scales*. Cham: Springer, 2016.
- [15] Dokoumetzidis A, Papadopoulou V, Macheras P. Analysis of dissolution data using modified versions of Noyes–Whitney equation and the Weibull function. *Pharm Res* 2006; 23: 256-261.
- [16] Erol AS, Anaç H, Olgun A. Numerical solutions of conformable time-fractional Swift-Hohenberg equation with proportional delay by the novel methods. *Karamanoglu Mehmetbey Univ J Engin Natural Sci* 2023; 5(1), 1-24.
- [17] Gulsen T, Yilmaz E, Goktas S. Conformable fractional Dirac system on time scales. *J Inequal Appl* 2017; 2017(1): 161.
- [18] Gülşen T, Acar M. Self-Adjoint Sturm-Liouville Dynamic Problem via Proportional Derivative. *JIST* 2023; 13(4): 2945-2957.
- [19] Gülşen T, Yilmaz E, Kemaloğlu H. Conformable fractional Sturm-Liouville equation and some existence results on time scales. *Turk J Math* 2018; 42(3): 1348-1360.
- [20] Hilger S. Analysis on measure chains a unified approach to continuous and discrete calculus. *Results Math* 1990; 18(1).
- [21] Kartal A, Anaç H, Olgun A. Numerical solution of conformable time fractional generalized Burgers equation with proportional delay by new methods. *Black Sea Sci J* 2023; 13(2), 310-335.
- [22] Kartal A, Anaç H, Olgun A. The new numerical solutions of conformable time fractional generalized Burgers equation with proportional delay. *Gümüşhane Univ J Sci* 2023; 13(4), 927-938.
- [23] Katsanevakis S, Maravelias CD. Modelling fish growth: multi-model inference as a better alternative to a priori using von Bertalanffy equation. *Fish fish* 2008; 9(2): 178-187.
- [24] Katugampola U. A new fractional derivative with classical properties, arXiv:1410.6535v2, 2014.
- [25] Khalil R, Horani MAL, Yousef A, Sababheh M. A new definition of fractional derivative. *J Comput Appl Math* 2014; 264: 57–66.
- [26] Lindberg NO, Lundstedt, T. The relationship between the dissolution rate and the particle size of prednimustine: a disagreement with the noyes-whitney equation. *Drug Dev Ind Pharm* 1994; 20(16): 2547-2550.
- [27] Ortigueira MD, Machado JT. What is a fractional derivative? *J Comput Phys* 2015; 293: 4-13.
- [28] Öner BK, Anaç H. The Numerical Solutions of the Conformable Time-Fractional Noyes Field Model via a New Hybrid Method. *IKJM* 2023; 5(2), 76-91.
- [29] Segi Rahmat MR. A new definition of conformable fractional derivative on arbitrary time scales. *Adv Differ Equ* 2019; 2019(1): 1-16.
- [30] Shi Y, Wan A, Shi Y, Zhang Y, Chen Y. Experimental and mathematical studies on the drug release properties of aspirin loaded chitosan nanoparticles. *BioMed Res Int* 2014; 2014: 8 pages.
- [31] Tomar BS, Tirumkudulu MS, Yu W, Berchielli A, Manthana S, Doshi P. A model to predict drug release from a single-layer osmotic controlled-release tablet. *J Drug Deliv Sci Technol* 2023; 80, 104138.
- [32] Van der Zwaan I, Frenning G. A new modelling approach for dissolution of polydisperse powders. *Int J Pharma* 2023; 633, 122626.
- [33] Wimalasiri VW, Dunuweera SP, Dunuweera AN, Rajapakse RMG. Research article Noyes-Whitney dissolution model-based pH-sensitive slow release of paclitaxel (taxol) from human hair-derived keratin microparticle carriers. *BioMed Res Int* 2021; 2021, Article ID 6657482: 8 pages.
- [34] Yilmaz E, Gulsen T, Panakhov ES. Existence Results for a Conformable Type Dirac System on Time Scales in Quantum Physics. *Appl Comput Math Int J* 2022; 21(3): 279-291.



Fırat Üniversitesi Fen Bilimleri Dergisi

Telif Hakkı Devir Formu / Copyright Form

Biz aşağıda gerekli bilgileri bulunan,

[Yazarların Adı / Author names]

.....tarafımızdan yazılmış,

[Makale Adı / Article title]

.....

başlıklı makale içeriği, sunduğu sonuç, bilgi, bulgu ve yorumları konusunda, Fırat Üniversitesi Fen Bilimleri Dergisi Editörlüğü'nün hiç bir sorumluluk taşımadığını kabul ederiz.

Sunduğumuz makalenin orijinal olduğunu; herhangi bir başka dergiye yayınlanmak üzere gönderilmediğini; daha önce yayınlanmadığını; tümüyle yada bir bölümü herhangi bir kongre/sempozyum da sunulup fakat tam metin olarak basılmadığını ve orijinal telif hakkı devri formu ile birlikte Fırat Üniversitesi Fen Bilimleri Dergisi Editörlüğü'ne gönderildiğini garanti ederiz.

Makalenin telif hakkından feragat etmeyi kabul ederek sorumluluğu üstlenir ve imza ederiz. Bu vesileyle makalenin telif hakkı Fırat Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü' ne devredilmiştir. Fırat Üniversitesi Fen Bilimleri Dergisi Editörlüğü makalenin yayınlanabilmesi konusunda yetkili kılınmıştır. Bununla birlikte yazarların aşağıdaki hakları saklıdır:

Aşağıdaki ve diğer bütün durumlarda makalenin Fırat Üniversitesi Fen Bilimleri Dergisi tarafından yayımlandığına dair referans verilmelidir.

1. Telif Hakkı dışında kalan patent v.b. bütün tescil edilmiş haklar.
2. Makaleyi satmamak koşulu ile kendi amaçları için çoğaltma hakkı.
3. Yazarın gelecekteki kitaplar ve dersler gibi çalışmalarında; makalenin tümü ya da bir bölümünü ücret ödemeksizin kullanma hakkı.

Bütün yazarlar tarafından imzalanması gerekiyor: (Sorumlu yazar/Corresponding author*)

Yazarın Adı ve Soyadı / Author Names

İmzası / Signature

Tarih / Date

1

2

3

4

5

NOT: Eksik imza durumunda sorumluluk imzalayan yazarlara aittir. Lütfen formu doldurunuz, imzalayınız ve aşağıdaki adrese metinle birlikte gönderiniz.

Adres: Fırat Üniversitesi Fen Bilimleri Dergisi Editörlüğü, F.Ü. Fen Bilimleri Enstitüsü, 23119-Elazığ.