

Aktüerya Derneği

İstatistikçiler Dergisi: İstatistik & Aktüerya

Journal of Statisticians: Statistics and Actuarial Sciences

IDIA 17, 2024, 1, 1-13

Geliş/Received:02.08.2023, Kabul/Accepted: 28.02.2024

Araştırma Makalesi / Research Article

## Risk evaluation of exchange rate portfolio based on the copula-GARCH approach

Emre Yıldırım

Ankara Hacı Bayram Veli University,  
Continuing Education Application and  
Research Center, Ankara, Turkey  
[emre-yildirim@hby.edu.tr](mailto:emre-yildirim@hby.edu.tr)  
ORCID No: 0000-0002-2816-7473

Mehmet Ali Cengiz

Ondokuz Mayıs University,  
Department of Statistics,  
Samsun, Turkey  
[macengiz@omu.edu.tr](mailto:macengiz@omu.edu.tr)  
ORCID No: 0000-0002-1271-2588

### Abstract

In this paper, risk estimation for the portfolio consisting of USD/TRY and JPY/TRY exchange rates is performed via the copula-GARCH approach. For this purpose, risk estimation models are created by means of alternative weighting techniques. The dependency between the related variables is modelled through copulas since they provide a flexible method for modelling various dependency structures such as tail dependency. It is aimed to obtain a better risk estimation model by combining the copula-GARCH approach with several weighting techniques. It is decided that the dependency between USD/TRY and JPY/TRY exchange rates is best modeled by Students' t copula among copulas tried in this study. The risk estimation models produced by the copula-GARCH approach outperform classical methods. Finally, it is concluded that the risk estimation model based on the copula-GARCH approach combined with the minimum variance weights gives better results than other weighting techniques in terms of both the performance of the risk measures and the backtesting outcomes.

**Keywords:** Copula approach, dependence modelling, exchange rate market, risk management, weighting techniques.

### Öz

#### Kopula-GARCH yaklaşımıyla döviz kurları portföyünün risk değerlendirmesi

Bu çalışmada, USD/TRY ve JPY/TRY döviz kurlarından oluşan portföyün kopula-GARCH yaklaşımıyla risk tahmini yapılmaktadır. Bu amaçla, alternatif ağırlıklandırma teknikleri kullanılarak risk tahmin modelleri oluşturulmaktadır. İlgili değişkenler arasındaki bağımlılık, kuyruk bağımlılığı gibi çeşitli bağımlılık yapılarının modellenmede esnek bir yöntem sağladığı için kopulalar aracılığıyla modellenmektedir. Kopula-GARCH yaklaşımı çeşitli ağırlıklandırma teknikleri ile birleştirilerek daha iyi bir risk tahmin modeli elde edilmesi amaçlanmaktadır. USD/TRY ve JPY/TRY döviz kurları arasındaki bağımlılığın çalışmada denenen kopulalar arasında Student t kopula ile en iyi şekilde modellendiği belirlenmiştir. Kopula-GARCH yaklaşımı ile üretilen risk tahmin modellerinin klasik yöntemlere göre daha iyi performans göstermiştir. Son olarak, minimum varyans ağırlıkları ile birleştirilen kopula-GARCH yaklaşımına dayalı risk tahmin modelinin, hem risk ölçümlerinin performansı hem de geriye dönük test sonuçları açısından diğer ağırlıklandırma tekniklerine göre daha iyi sonuçlar verdiği sonucuna varılmıştır.

**Anahtar sözcükler:** Kopula yaklaşımı, bağımlılık modelleme, döviz kuru piyasası, risk yönetimi, ağırlıklandırma teknikleri.

## 1. Introduction

Value at Risk (VaR) is a standard risk measure commonly used by financial institutions to determine the risks of assets. In other words, VaR is defined as the maximum possible loss of a financial position in a holding period and at a given confidence level. The estimation of VaR is not tough if any portfolio consists of a financial asset. However, if a portfolio consists of more than one asset, estimating accurately of VaR becomes difficult due to modelling the joint distribution functions of assets. There are several VaR estimation methods in the literature such as historical simulation and variance covariance. The second risk measure in the study is the expected shortfall (ES) which is called Conditional Value at Risk. ES that is evaluated based on loss exceeding of VaR is a consistent risk measure. In this paper, both VaR and ES estimation methods are generated by combining the copula-GARCH (Generalized Autoregressive Conditional Heteroscedasticity) approach with alternative weighting techniques. In traditional VaR estimation methods, the multivariate normal distribution is assumed for the joint distribution function of assets. However, empirical studies claim that the distribution of assets is asymmetrical and heavily tailed. Therefore, VaR estimation methods based on the assumption of multivariate normal distribution may give misleading results. The copula method is used to tackle such the problem. Sklar's theorem [1], which reveals the existence of copulas, introduces that the n-dimensional joint distribution function can be decomposed into n-marginal distributions and a copula that models the whole dependence structure between interested variables. This feature allows the margins and the copula to be selected from different distribution families in constructing the joint distribution function. Moreover, copulas are widely used in the financial area in particular since they are invariant under nonlinear strictly increasing transformations. They can model various dependency structures such as asymmetry and tail dependency.

In this paper, the VaR estimation for the portfolio consisting of USD/TRY and JPY/ TRY exchange rates is performed via the copula-GARCH approach. First, ARMA-GARCH models are used to capture the autocorrelation and heteroscedasticity of exchange rate returns. They can successfully model the characteristics of financial variables such as asymmetry and volatility clustering. Secondly, the opula method is employed to model the dependency structure between USD/TRY and JPY/TRY exchange rates. Risk estimation methods based on the copula-GARCH approach with several weighting techniques are constructed. After performing backtesting the out of sample data, the estimation performances of traditional VaR methods with the copula-GARCH methods are compared using alternative weighting techniques.

The rest of the paper is organized as follows. In section 2, related works are introduced. Section 3 presents the methodology used in the study. In section 4, experimental results are given and the main findings are emphasized. In section 5, the results of the paper are discussed.

## 2. Literature review

Patton [2] models the dependency structure between the Deutsche Mark and the Japanese Yen against the US dollar using the copula approach. He concluded that they are more correlated than appreciation when related exchange rates depreciate against the US dollar. Aloui et al. [3] investigates the dependency between crude oil and natural gas markets by the copula-GARCH method. The study suggested that crude oil and natural gas markets tend to comovement when general markets rise, but the tendency to comovement in these markets decreases during decline of general markets. Yıldırım and Cengiz [4] discuss the dependency structure between exchange rate and gold prices by means of DCC (Dynamic Conditional Correlation)-GARCH (Generalized Autoregressive Conditional Heteroscedasticity)-Copula. They concluded that the dependency among the related variables changes over time and that Student-t copula outperforms other copula approaches in modelling the dependency. Roberedo et al. [5] study the dependency structure between the Czech Republic, Hungary, Poland and

Romania stock markets using elliptical and Archimedean copulas. Yıldırım and Cengiz [6] analyse the dependency between industry production and energy markets via stochastic copula approach and they determined that the dependency between industry production and energy markets evolves over time. Ignatieva and Trück [7] use the copula-GARCH approach to model the dependence between electricity spot prices in regional markets in Australia. They estimated Value at Risk for a portfolio composing of electricity spot prices. Lu et al. [8] estimate value at risk of an equal weighted portfolio consisting of crude oil and natural gas futures prices via the copula-GARCH method. Wu et al. [9] model the dependence between oil and exchange rates using the GARCH method based on the copula. Asset allocation was performed through this method and they found that the GARCH model combined with the Student t copula gives the best performance. Jin et al. [10] investigates the dependency structure between crypto, exchange rate, commodity and stock market markets with the GARCH-EVT-Copula approach. The related markets are analyzed separately before and after the Covid-19 outbreak. Before and after the outbreak, there has been a significant change in the dependency between the interested markets. Backtesting results suggest that the model offers accurate risk measures. Taleblou and Davoudi [11] estimate VaR and ES using the DCC-GARCH-Copula approach for a portfolio of 10 industrial indices on the Tehran stock exchange. They found that the DCC-GARCH model combined with Student's t copula provides reasonable results. Bruhn and Ernst [12] create a portfolio consisting of cryptocurrencies and estimate the risk measures of the portfolio via the GARCH-EVT-copula approach. They suggest that a portfolio of just one cryptocurrency or many cryptocurrencies have extreme risk of loss. He and Hamori [13] model the dependence between the oil market and the exchange rates of BRICS countries using the copula-GARCH approach. They found negative dependence and significant tail dependence between the related markets. Additionally, VaR and ES estimates are performed via the copula-GARCH approach for the portfolio created from the relevant markets.

There are several contributions to this paper. The copula-GARCH method does not require normality assumption and thus overcomes the limitations of conventional risk estimation methods. Moreover, it can model marginals with skewed distributions as well as asymmetric dependence structure. Additionally, this approach allows obtaining unknown multivariate distributions via a copula and marginals from different distribution families. Finally, risk estimation models based on the copula-GARCH method combined with alternative weighting techniques are constructed.

### 3. Methodology

#### 3.1. ARMA-GARCH model

ARCH (Autoregressive Conditional Heteroscedasticity) model is introduced by Engle [14] to model time-varying volatility in financial time series. This model assumes that conditional heteroscedasticity is a linear combination of its lag errors. The shortcoming of the model requires a large number of parameter estimates to model the volatility of financial variables. To overcome this difficulty, Bollerslev [15] improved the GARCH model that is the generalized version of ARCH models. In this model, volatility is assumed to consist of both its own lagged values and its own lagged errors. Moreover, it does not require a large number of parameter estimates to model the volatilities of financial time series. ARMA-GARCH models are used since the returns of financial time series exhibit both autocorrelation and heteroscedasticity. These models are defined as in Eq. (1):

$$r_t = \mu + \sum_{i=1}^p \varphi_i r_{t-i} + \sum_{j=1}^q \theta_j \varepsilon_{t-j} + \varepsilon_t$$

$$\varepsilon_t = \sigma_t \eta_t \tag{1}$$

$$\sigma_t^2 = \omega + \sum_{i=1}^k \alpha_i \eta_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^l \beta_j \sigma_{t-j}^2$$

Here,  $r_t$  and  $\sigma_t^2$  represent the conditional mean variance of the returns at time  $t$ , in turn.  $\mu, \varphi_i$  and  $\theta_j$  in the mean equation are constant, AR and MA parameters, respectively. In the variance equation,  $\omega, \alpha_i$  and  $\beta_j$  are constant, ARCH and GARCH parameters, respectively. There are restrictions for the parameters such as  $\omega > 0, \alpha_i, \beta_j \geq 0$  and  $\sum_{i=1}^k \alpha_i + \sum_{j=1}^l \beta_j \leq 1$ . In addition,  $\eta_t$  is identically and independently distributed with zero mean and unit variance. Normal, Student t and skewed Student t distribution introduced by Theodossiov [16] are assumed for  $\eta_t$  standardized residuals.

### 3.2. Copula approach

Modelling the dependency structure between variables is crucial in the risk estimation of the portfolio. Since financial time series returns often exhibit asymmetry and kurtosis, modelling the dependency between these series using symmetric tools gives misleading results. To cope with this issue, the copula approach is proposed. Copulas gaining popularity especially in econometrics and finance can model asymmetric and tail dependencies as well as symmetric dependency between financial variables. Moreover, they do not require any assumptions to construct the joint distribution of the related financial variables. Therefore, the copula is a flexible approach for modelling the dependency structure between financial variables. According to Sklar's [1] theorem, any multivariate distribution function can be decomposed into marginal distributions and a copula that reflects the whole dependency structure between the relevant variables.

Let  $F$ , and  $(F_1, \dots, F_n)$  be  $n$ -dimensional joint distribution function and the marginal distributions of the variables, respectively. Then, there is an  $n$ -dimensional copula for all  $x$  in  $R^n$  and it is defined as follows.

$$F(x_1, \dots, x_n) = C(F_1(x_1), \dots, F_n(x_n)) \quad (2)$$

Where,  $C$  is uniquely defined if  $(F_1, \dots, F_n)$  are continuous. On the other hand, there is a  $n$ -dimensional  $F$  distribution function if  $(F_1, \dots, F_n)$  marginal distribution functions and  $C$  is a copula. Any  $n$ -dimensional joint probability density function can be described with marginals and a copula as follows:

$$\begin{aligned} f(x_1, \dots, x_n) &= \frac{\partial F(x_1, \dots, x_n)}{\partial x_1, \dots, x_n} \\ &= \frac{\partial C(u_1, \dots, u_n)}{\partial u_1, \dots, u_n} \times \prod_{i=1}^n \frac{\partial F(x_i)}{\partial x_i} \\ &= c(u_1, \dots, u_n) \times \prod_{i=1}^n f_i(x_i) \end{aligned} \quad (3)$$

Here,  $c$  represents the copula density function. Eq. (3) means that selections of a copula and marginals do not depend on each other. Therefore, the copula approach enables to model the dependency flexibly. The parameter estimations of the copula are performed by Inference for Margins (IFM) method. For detailed information on theory of the copula, Nelsen [17] and Joe and Kurowicka [18] can be viewed.

### 3.3. Risk management

Risk estimation of financial assets is substantial for investors and financial institutions. For this purpose, there are two main measures commonly used in literature: VaR and ES. These measures refer to the maximum expected loss of the portfolio at a given level of confidence and over a holding period under normal market conditions. The VaR and ES of a financial position over  $t$  time period at a given  $p$ -probability are defined respectively as follows.

$$VaR_{1-p} = \inf\{x|F_l(x) \geq 1 - p\} \quad (4)$$

$$ES_{1-p} = E(X|X > VaR) = \frac{\int_{VaR}^{\infty} xf(x)dx}{P(X > VaR)} \quad (5)$$

Here  $F_l(x)$  and  $f(x)$  is the cumulative distribution function and probability density function of the portfolio, respectively.  $F_l(x)$  can also be described as the loss function at time  $l$  and  $p$  is a given probability. As can be seen from Eq. (4) and Eq. (5), the selection of the distribution function plays essential role for VaR and ES.

### 3.4. Copula-GARCH method

Autocorrelation and heteroskedasticity often exist in financial time series. Therefore, these series are not independent and identically distributed. To overcome this problem, the ARMA-GARCH approach can be used, thus obtaining independent and identically distributed series required for dependency modeling. Various dependency structures, such as asymmetric and tail dependency, may exist between new series. Therefore, flexible dependency modeling tools are needed, and copulas offer significant advantages in this context. Thanks to the copulas, the dependency structures required for risk estimation are obtained. Combining these two methods is called the copula-GARCH approach in the literature. With this approach, estimations are performed for future periods and risk measures such as VaR and ES are computed.

In this study, VaR and ES estimations of the portfolio are performed by means of the copula-GARCH approach. VaR and ES estimations based on the copula-GARCH model are obtained via the steps in Table 1.

**Table 1.** Algorithm for VaR and ES estimation based on the copula-GARCH approach

Step 1	ARMA-GARCH models are estimated through fitted marginal distribution for each financial asset return.
Step 2	For the $T + 1$ time, one-step ahead conditional means and volatilities of returns are forecasted.
Step 3	$N$ times data is simulated from the bivariate distribution modelled by the copula-GARCH approach for $T + 1$ time and standardized (simulated) residuals are obtained by applying inverse transformation function to (simulated) values.
Step 4	The logarithmic return series of the assets are obtained using the conditional means and volatilities forecasted in Step 2 and the standardized residuals produced in Step 3.
Step 5	Step 3 and Step 4 are repeated for $N$ times and then the logarithmic returns are multiplied by the weighting vector and then sorted ascending. The 95% and 99% VaR and ES estimates are calculated as follows.

	i. 95 % VaR = $N * (1 - 0.95)$ observation in sorted series. ii. 99 % VaR = $N * (1 - 0.99)$ observation in sorted series. iii. 95 % ES = mean of the first $N * (1 - 0.95)$ observations in sorted series. iv. 99 % ES = mean of the first $N * (1 - 0.99)$ observations in sorted series.
--	--

When VaR and ES are estimated by the copula-GARCH approach, the selection of  $N$  simulations is very critical. The higher the  $N$  number, the more accurate the VaR and ES estimates. However, increasing the number of simulations is time consuming. Therefore, 100000 simulation data proposed in the literature are used in this paper.

### 3.4.1. Portfolio weighting techniques

Portfolio weighting is one of the most essential elements of portfolio selection problems. In this paper, equal weighting, inverse volatility weighting and minimum variance weighting techniques are applied. Let  $n$  be the number of assets in a portfolio and weighting techniques are summarized in Table 2.

**Table 2.** Portfolio weighting techniques

Weighting techniques	Formula
Equal weighting	$w_i = \frac{1}{n}$
Inverse volatility weighting	$w_i = \frac{1/\sigma_i}{\sum_{i=1}^n 1/\sigma_i}$
Minimum variance weighting	$w = \min_w w^T \Sigma w$ $1^T w = 1$ $w \geq 0$ $c < 0$

### 3.4.2. Evaluation of VaR estimation

Risk estimation performances of the portfolio can be evaluated by using out of sample data set. In this sense, unconditional coverage test (KT) of Kupiec [19] and conditional coverage test (CT) of Christoffersen [20] are backtesting methods commonly used in literature. The former is based on the number of losses exceeding the VaR while the latter takes account of both the number of losses exceeding VaR and the dependency between losses. In both test, acceptance of null hypothesis indicates that proposed model is accurate. For more detailed information on these tests, Kupiec [19] and Christoffersen [20] can be viewed. The methods mentioned above select appropriate model by considering the frequency of losses exceeding the VaR and the independence of the losses. However, the information contained in these losses is limited. The loss function introduced by Lopez [21] takes into account the magnitude of the losses rather than the number of losses. Let  $L_t$  be loss at  $t$  time. So, the loss function of Lopez is defined as follows.

$$C_t^L = \begin{cases} 1 + (|L_t| - VaR_t)^2 & L_t < -VaR_t \\ 0 & L_t > -VaR_t \end{cases} \quad (6)$$

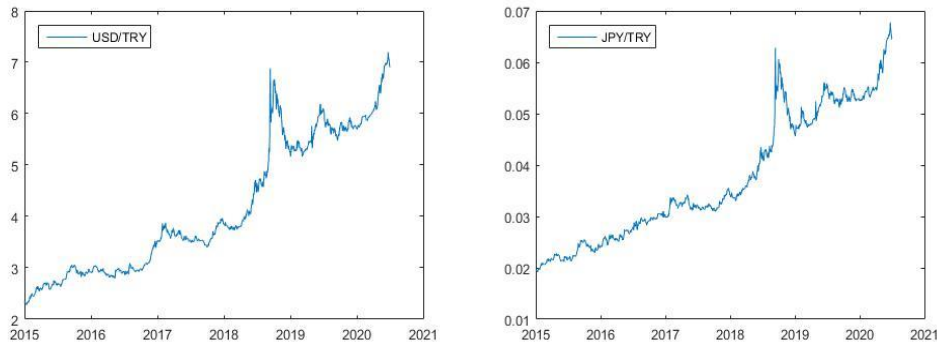
Here,  $C_t^L$  is the loss function in  $t$  time. Backtesting is performed by meaning the loss functions and estimated model with the lowest value is selected as the best fitted model.

$$\hat{C}^L = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T C_t^L \quad (7)$$

It is noted that firstly fitted model should pass the statistical tests of Kupiec [19] and Christoffersen [20]. Then, the best model is determined by comparing candidate models with the help of the loss function.

#### 4. Empirical application

In this section, the risk estimation of a portfolio consisting of USD/TRY and JPY/TRY exchange rates is investigated. The data set consisting of 1402 daily closing prices ranges from January 1, 2015 to May 15, 2020. The data is extracted from Yahoo Finance database. For the analysis, exchange rates with daily frequency are used due to some reasons. First, it is extremely challenging to make accurate risk estimations because there are many fluctuations in daily price series. Secondly, there are various dependency structures such as asymmetric and tail dependency among daily price series, and there is a need to overcome such dependencies. It is aimed to indicate that the copula-GARCH approach is available for modelling such data. This paper is carried out with R software and some R packages are utilized for statistical tests. The price series of the USD/TRY and JPY/TRY exchange rates are displayed in Fig 1.



**Figure 1.** The price series of the USD/TRY and JPY/TRY exchange rates, respectively

In this paper, the log-returns from the original price series are analysed and they are calculated as given in Eq. (8).

$$r_t = \ln\left(\frac{p_t}{p_{t-1}}\right) \quad (8)$$

Where,  $p_t$  represents the price of a financial asset in  $t$  time. The data set is divided into two parts to check the accuracy of the risk estimation: train sample and test sample. The train sample covers between January 1, 2015 and December 31, 2018 and consists of 1042 observations. The test sample ranges from January 1, 2019 to May 15, 2020, and comprise of 359 daily closing prices. The test sample equals to approximately 25% of the full sample. While estimation model is constructed using the train sample, performances of the estimated models are evaluated by means of test sample. Descriptive statistics for return series are presented in Table 3.

**Table 3.** Descriptive statistics for daily exchange rate returns

	Full Sample		Train Sample		Test Sample	
	USD/TRY	JPY/TRY	USD/TRY	JPY/TRY	USD/TRY	JPY/TRY
Mean	0.00077	0.00085	0.00078	0.00086	0.00074	0.00081
Std. Dev.	0.01050	0.01207	0.01110	0.01261	0.00867	0.01036
Skewness	1.96382	1.33120	2.23655	1.42049	0.11403	0.77600
Kurtosis	32.83721	19.54702	34.70541	20.80580	7.51758	7.44898
JB Stats	64044	22793	53384	19228	859.42	879.41
P-Value	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000

It is evident that the means of USD/TRY and JPY/TRY returns are positive. Besides, return of JPY/TRY is higher than the return of USD/TRY and same result is valid for their volatilities. This confirms the conclusion that assets with high return have high risk. On the other hand, the standard deviations of returns are greater than their means and this indicates that the relevant exchange rates are highly volatile. The skewness values are positive for both the exchange rates. This refers that there is a high probability of observing large positive returns at related exchange rates. Moreover, the values of kurtosis show that the exchange rates are distributed leptokurtic. These results imply that the return series are not normally distributed. Jarque Bera statistics reject significantly the null hypothesis of unconditional normality for both returns series at 1% significance level. All results seemed to be almost the same for both the train sample and the test sample. Thus, the test sample can reflect the features of all data and more reasonable results are produced.

**Table 4.** Stationary and autocorrelation results for daily exchange rate returns, respectively

	ADF	P-Value	Ljung-Box Q	P-Value	Ljung-Box Q <sup>2</sup>	P-Value
USD/TRY	-28.4	0.00000	50.873	0.00000	285.63	0.00000
JPY/TRY	-30.9	0.00000	19.309	0.00727	384.31	0.00000

Table 4 presents the stationary and autocorrelation test results of exchange rate returns. The ADF (Augmented Dickey-Fuller) test rejects the null hypothesis of the non-stationary time series for both return series at 1% level of significance. Stationary time series models can be used for the conditional mean of USD/TRY and JPY/TRY exchange rates. Ljung-Box Q statistics for both returns series demonstrate that there is an autocorrelation in these series. In this case, ARMA models can be employed for modelling conditional means of the return series. Ljung-Box Q test is applied to squared return series and it is determined that these series are dependent. Lagrange multiplier test demonstrates that there is an ARCH effect in the return series. Therefore, ARMA-GARCH approach is needed for modelling the return series of USD/TRY and JPY/TRY.



**Table 5:** Parameter estimations for marginal distributions and statistical tests

Parameter	USD/TRY: GARCH-ST			JPY/TRY: GARCH-ST (Skewed)		
	Value	SE	P-Value	Value	SE	P-Value
$\mu$	0.00033	0.00021	0.12096	0.00079	0.00030	0.00895
$\varphi_1$	0.59244	0.01625	0.00000	1.31142	0.00143	0.00000
$\varphi_2$	-0.99356	0.01172	0.00000	-0.99320	0.00525	0.00000
$\theta_1$	-0.58772	0.00359	0.00000	-1.32846	0.00181	0.00000
$\theta_2$	1.00151	0.00199	0.00000	1.00159	0.00036	0.00000
$\omega$	0.00001	0.00001	0.42420	0.00000	0.00001	0.00000
$\alpha_1$	0.13388	0.02302	0.00000	0.09866	0.01206	0.00000
$\beta_1$	0.81075	0.04617	0.00000	0.83502	0.02123	0.00000
$\nu$	5.32426	1.62294	0.00103	1.13123	0.04799	0.00000
$\xi$	/	/	/	5.35866	0.80896	0.00000
	Statistics		P-Value	Statistics		P-Value
Ljung Box Q	4.94874		0.66621	1.56861		0.97994
Engle test	8.24863		0.31122	9.45190		0.22187

In addition to the GARCH model, alternative GARCH models such as GJR-GARCH, TGARCH and NGARCH are tried. The best model is selected based on AIC and BIC criteria and it is evaluated whether the estimated model is suitable via diagnostic tests. It is decided that ARMA (2,2) -GARCH (1,1) Student t distribution and ARMA (2,2) -GARCH (1,1) skewed Student t distribution are convenient for USD/TRY and JPY/TRY, respectively. Table 5 displays the parameter estimations and model sufficiency for marginal models. For USD/TRY returns, all parameters except constant term in the model are found to be significant at 1% significance level while all parameters of the model estimated for JPY/TRY are significant at 1% significance level. For JPY/TRY,  $\xi$  skewness parameter is discovered to be significant and this result shows that skewed Student t distribution is required for the exchange rate. It is determined that the residuals obtained from estimated models do not demonstrate autocorrelation and ARCH effects. Hence, estimated models are adequate for both USD/TRY and JPY/TRY exchange rates. In other respects, the large estimations of  $(\alpha_i + \beta_i)$  parameters in GARCH models mean that volatility is persistent. Standardized residuals obtained from ARMA-GARCH models are transformed into uniform inputs needed for the copula via probability integral transform. The joint distribution function of the portfolio is constructed based on the copula that can model the whole dependency structure between the variables.

**Table 6.** Selection of the copula and parameter estimations

Model	Parameter	LogL	AIC	BIC	Upper tail	Lower Tail
Normal	0.69	285.60	-569.21	-564.26	/	/
Student t	0.70;3.22	325.06	-646.13	-636.23	0.436	0.436
Clayton	1.35	216.77	-431.53	-426.58	/	0.598
Gumbel	1.94	304.45	-606.90	-601.95	0.571	/

Frank	5.87	286.63	-571.27	-566.32	/	/
Joe	2.24	255.38	-508.76	-503.81	0.638	/

Table 6 presents the estimations of parameters, which are the correlation coefficient for the Normal copula and correlation coefficient as well as degree of freedom for the Student copula, and goodness of fit for the copula models. It is deduced that Student t copula is the best fitted model since it has the smallest values of AIC and BIC. Student t copula enables to model linear and symmetrical tail dependency. Correlation coefficient and degree of freedom for Student t copula are estimated to be 0.70 and 3.22, respectively. Furthermore, estimation of tail dependency is obtained as 0.445. These results reveal that dependence structure between USD/TRY and JPY/TRY returns demonstrate a reasonably symmetrical and tail dependency.

The copula-GARCH method with historical simulation and variance-covariance approaches are analysed using various weighting techniques. Risk estimation results of equally weighted, inverse volatility weighted and minimum variance weighted portfolios are presented in Table 7, Table 8 and Table 9, respectively.

**Table 7.** Backtesting of risk estimations for equally weighted portfolio

Estimation Methods	Copula-GARCH	Historical simulation	Variance-Covariance
Statistical tests			
Rate of VaR exceeds at 95 %	0.03342	0.03064	0.02228
Rate of ES exceeds at 95 %	0.01114	0.01392	0.01392
KT at 95 %	2.33880	3.26738	7.25712
p-value	0.12618	0.07066	0.00706
CT at 95 %	3.02848	4.19812	9.23877
p-value	0.21997	0.12257	0.00985
Loss functions			
Lopez at 95 %	0.19722	0.26909	0.55154
Statistical tests			
Rate of VaR exceeds at 99 %	0.00557	0.01392	0.01392
Rate of ES exceeds at 99 %	0.00278	0.00278	0.00835
KT at 99 %	0.84708	0.49845	0.49845
p-value	0.35737	0.48017	0.48017
CT at 99 %	0.86955	4.33933	4.33933
p-value	0.64740	0.11421	0.11421
Loss functions			
Lopez at 99 %	0.01408	0.01107	0.01107

**Table 8.** Backtesting of risk estimations for inverse volatility weighted portfolio

Estimation Methods	Copula-GARCH	Historical simulation	Variance-Covariance
Statistical tests			
Rate of VaR exceeds at 95 %	0.03342	0.03064	0.02228
Rate of ES exceeds at 95 %	0.01114	0.01392	0.01392
KT at 95 %	2.33880	3.26738	7.25712
p-value	0.12618	0.07066	0.00706
CT at 95 %	3.02848	4.19812	9.23877
p-value	0.21997	0.12257	0.00985
Loss functions			
Lopez at 95 %	0.19722	0.26909	0.55154
Statistical tests			
Rate of VaR exceeds at 99 %	0.00557	0.01114	0.01392
Rate of ES exceeds at 99 %	0.00278	0.00278	0.00835
KT at 99 %	0.84708	0.04561	0.49845
p-value	0.35737	0.83088	0.48017
CT at 99 %	0.86955	4.85736	4.33933
p-value	0.64740	0.08152	0.11421
Loss functions			
Lopez at 99 %	0.01408	0.00093	0.01107

**Table 9.** Backtesting of risk estimations for minimum variance portfolio

Estimation Methods	Copula-GARCH	Historical simulation	Variance-Covariance
--------------------	--------------	-----------------------	---------------------

Statistical tests			
Rate of VaR exceeds at 95 %	0.03342	0.03342	0.02228
Rate of ES exceeds at 95 %	0.00835	0.01392	0.01392
KT at 95 %	2.33880	2.33880	7.25712
p-value	0.12618	0.12618	0.00706
CT at 95 %	3.02848	3.02848	9.23877
p-value	0.21997	0.21997	0.00985
Loss functions			
Lopez at 95 %	0.19722	0.19722	0.55154
Statistical tests			
Rate of VaR exceeds at 99 %	0.00557	0.01114	0.01392
Rate of ES exceeds at 99 %	0.00000	0.00557	0.00835
KT at 99 %	0.84708	0.04561	0.49845
p-value	0.35737	0.83088	0.48017
CT at 99 %	0.86955	4.85736	4.33933
p-value	0.64740	0.08815	0.11421
Loss functions			
Lopez at 99 %	0.01408	0.00093	0.01107

It is concluded that risk estimation models based on the copula-GARCH approach created with alternative weighting techniques are more reasonable models at both 5% and 1% significance levels in terms of Kupiec and Christoffersen tests. In comparison with rates of VaR and ES exceeding, it is discovered that VaR and ES exceeding rates of models based on the copula-GARCH approach are smaller than other approaches at 1% significance level while they are almost the same at 5% level of significance. In addition, except of portfolios formed with minimum variance weights, values of the loss function obtained from the copula-GARCH methods are smaller than other approaches at 5% significance level even though they are close to each other at 1% significance level. All results reveal that risk estimation models based on the copula-GARCH approach created by alternative weighting techniques give better results. On the other hand, it is deduced that the risk estimation model based on the copula-GARCH approach created with minimum variance weights outperforms those combined with other weighting techniques.

## 5. Conclusion

In this paper, the risk estimation of the exchange rate portfolio consisting of USD/TRY and JPY/TRY exchange rates is investigated using variance-covariance, historical simulation and the copula-GARCH approach combined with alternative weighting techniques. The study consists of three stages. First, ARMA-GARCH type models are used to model the marginals of USD/TRY and JPY/TRY exchange rate returns. For the returns of USD/TRY and JPY/TRY, it is decided based on both information criteria and diagnostic tests that the best fitted models are ARMA (2,2) -GARCH (1,1) with Student t distribution and ARMA (2,2) -GARCH (1,1) with skewed Student t distribution, respectively.

In the second stage, the copula approach is used to model the dependency between related exchange rates. The dependency between USD/TRY and JPY/TRY exchange rates is found out to be best modelled via Student t copula depending on the information criteria. In the third stage, various risk estimation models are created through several weighting techniques and they are compared by

backtesting methods. It is concluded that the copula-GARCH approach is more reasonable model compared to historical simulation and variance-covariance methods. Furthermore, risk estimation models based on the copula-GARCH approach combined with minimum variance weights give better results than those created with other weighting techniques. In this study, risk estimation models are constructed for exchange rate markets. For future research, different markets such as stock and energy can be studied by means of the copula-GARCH approach formed by alternative weighting techniques.

## References

- [1] Sklar, M. (1959). Fonctions de repartition an dimensions et leurs marges. *Publ. inst. statist. univ. Paris*, 8, 229-231.
- [2] Patton, A. J. (2006). Modelling asymmetric exchange rate dependence. *International economic review*, 47(2), 527-556.
- [3] Aloui, R., Aïssa, M. S. B., Hammoudeh, S., and Nguyen, D. K. (2014). Dependence and extreme dependence of crude oil and natural gas prices with applications to risk management. *Energy Economics*, 42, 332-342.
- [4] Yıldırım, E., and Cengiz, M. A. (2018). Dependency between exchange rate and gold price via copula-DCC-GARCH approach. *International Journal for Scientific Research and Development*, 6(5), 974-978.
- [5] Reboredo, J. C., Tiwari, A. K., and Albulescu, C. T. (2015). An analysis of dependence between Central and Eastern European stock markets. *Economic systems*, 39(3), 474-490.
- [6] Yıldırım, E., and Cengiz, M. A. (2022). Modeling dependency between industry production and energy market via stochastic copula approach. *Communications in Statistics-Simulation and Computation*, 1-14.
- [7] Ignatieva, K., and Trück, S. (2016). Modeling spot price dependence in Australian electricity markets with applications to risk management. *Computers & Operations Research*, 66, 415-433.
- [8] Lu, X. F., Lai, K. K., and Liang, L. (2014). Portfolio value-at-risk estimation in energy futures markets with time-varying copula-GARCH model. *Annals of operations research*, 219(1), 333-357.
- [9] Wu, C. C., Chung, H., and Chang, Y. H. (2012). The economic value of co-movement between oil price and exchange rate using copula-based GARCH models. *Energy Economics*, 34(1), 270-282.
- [10] Jin, F., Li, J., & Li, G. (2022). Modeling the linkages between Bitcoin, gold, dollar, crude oil, and stock markets: A GARCH-EVT-copula approach. *Discrete Dynamics in Nature and Society*, 2022.
- [11] Taleblou, R., & Davoudi, M. M. (2020). Calculating Value at Risk: DCC-GARCH-Copula Approach. *Iranian Journal of Economic Research*, 25(82), 43-82.
- [12] Bruhn, P., & Ernst, D. (2022). Assessing the Risk Characteristics of the Cryptocurrency Market: A GARCH-EVT-Copula Approach. *Journal of Risk and Financial Management*, 15(8), 346.
- [13] He, Y., & Hamori, S. (2019). Conditional dependence between oil prices and exchange rates in BRICS countries: An application of the copula-GARCH model. *Journal of Risk and Financial Management*, 12(2), 99.
- [14] Engle, R. F. (1982). A general approach to Lagrange multiplier model diagnostics. *Journal of Econometrics*, 20(1), 83-104.
- [15] Bollerslev, T. (1986). Generalized autoregressive conditional heteroskedasticity. *Journal of econometrics*, 31(3), 307-327.
- [16] Theodossiov, P. (1998). Financial data and the skewed generalized t distribution. *Management Science*, 44(12-part-1), 1650-1661.
- [17] Nelsen, R. B. (2007). *An introduction to copulas*. Springer Science & Business Media.
- [18] Joe, H., and Kurowicka, D. (Eds.). (2011). *Dependence modeling: vine copula handbook*. World Scientific.

- [19] Kupiec, P. H. (1995). *Techniques for verifying the accuracy of risk measurement models* (Vol. 95, No. 24). Division of Research and Statistics, Division of Monetary Affairs, Federal Reserve Board.
- [20] Christoffersen, P. F. (1998). Evaluating interval forecasts. *International economic review*, 841-862.
- [21] Lopez, J. A. (1998). Methods for evaluating value-at-risk estimates. *Economic Policy Review*, 4(3)



Aktüerya Derneği

İstatistikçiler Dergisi: İstatistik & Aktüerya

Journal of Statisticians: Statistics and Actuarial Sciences

IDIA 17, 2024, 1, 14-29

Geliş/Received:27.03.2024, Kabul/Accepted: 16.05.2024

Araştırma Makalesi / Research Article

## Yaşam çözümlemesinde çok durumlu modellerin geçiş olasılıklarının tahmini ve bir uygulama

**Esra Çiftçi<sup>1</sup>**

T.C. Sağlık Bakanlığı  
Çankaya, Ankara, Türkiye  
[esra.ciftci@saglik.gov.tr](mailto:esra.ciftci@saglik.gov.tr)  
ORCID: 0000-0002-8411-5889

**Duru Karasoy**

Hacettepe Üniversitesi, Fen Fakültesi  
İstatistik Bölümü  
[durdu@hacettepe.edu.tr](mailto:durdu@hacettepe.edu.tr)  
ORCID: 0000-0002-2258-4479

### Öz

Yaşam çözümlemesinde, tanımlanan bir olay gerçekleşene kadar geçen süre incelenmektedir. Bireyin ya da incelenen birimin başlangıç noktasından son noktaya varıncaya kadar geçirdiği sürede başka durumların yaşanması ve durumlar arasında geçişlerin olması söz konusudur. Çok durumlu yaşam çözümlemesi modelleri iki durumlu klasik yaşam çözümlemesi modellerinin genişletilmiş biçimidir. Literatürde en çok kullanılan çok durumlu model, üç durumlu modeldir. Bu çalışma ile üç durumlu model yapısı kısaca verilmiş ve iki durumlu modelde geçiş olasılığı ve standart hata tahminlerinde kullanılan tahmin edici yaklaşımı üç durumlu modele uyarlanmıştır. Geçiş olasılıklarının tahmin edilmesinde kullanılan Aalen-Johansen, ön düzgünleştirilmiş Aalen-Johansen, yaşam verisi analizi, Landmark, ön düzgünleştirilmiş Landmark, Landmark Aalen-Johansen ve ön düzgünleştirilmiş Landmark Aalen-Johansen tahmin edicilerine düzeltme yapılmış ve durumlar arası bütün geçişler için olasılık ve standart hata değerleri hesaplanmıştır. Yöntemlerin uygulanabilirliğini göstermek ve karşılaştırmak amacıyla R programı Survidm paketinde yer alan kolon kanseri verileri ile çalışılmıştır. Düzeltilmiş tahmin edicilerin standart hata değerleri daha düşük elde edilmiştir.

**Anahtar sözcükler:** Çok durumlu model, geçiş olasılıkları, yaşam çözümlemesi.

### Abstract

#### Estimation of the transition probabilities of multi-state models in survival analysis and an application

The time until an event occurs is examined in survival analysis. During the time from the starting point of an individual or a unit under study to the endpoint, other events may occur, and transitions between states are possible. Multi-state survival analysis models are an extension of the classical two-state survival analysis models. The most commonly used multi-state model in the literature is the three-state model. In this study, the three-state model structure is briefly presented and the predictive approach used for transition probabilities and standard error estimates in the two-state model is adapted to the three-state model. Adjustments are made to Aalen-Johansen, presmoothed Aalen-Johansen, lifetime data analysis, Landmark, presmoothed Landmark, Landmark Aalen-Johansen, and presmoothed Landmark Aalen-Johansen estimators used to estimate transition probabilities and probabilities and standard error values for all transitions between states are calculated. To demonstrate and compare the applicability of the methods, colon cancer data available in the R program Survidm package is used. Adjusted estimators have provided lower standard error values.

**Keywords:** Multi-state model, transition probabilities, survival analysis.

<sup>1</sup>Bu çalışma, birinci yazarın, ikinci yazarın danışmanlığında hazırladığı doktora tezinden üretilmiştir.

## 1. Giriş

Yaşam çözümlemesinde, tanımlanan bir olay gerçekleşene kadar geçen süre incelenmektedir. Genellikle ilgilenilen olayın gerçekleşmesine kadar geçen süre ile sürece ilişkin başlangıç ve son durumu inceleyen iki durumlu modeller tercih edilmektedir. Bir durumdan ya da bir geçiştten daha fazla sayıda geçiş, olay olduğu zaman çok durumlu modeller kullanılmaktadır. Kalbfleisch ve Prentice'in [1], Cox ve Oakes'in [2], Hamerle'in [3], Klein ve Moeschberger'in [4] ve Hougaard'ın [5] çalışmaları yaşam çözümlemesi alanına önemli katkıları olan ve çok durumlu modellerin genel teorisini ortaya koyan çalışmalardır.

Uygulamalarda her zaman iki durumlu yaşam çözümlemesi istenilen sonucu açıklayamayabilir. Bu tarz uygulamalarda çok durumlu modellerin yapısı, birden çok durum ve zamana bağlı verilerin çözümlemesinin yapılmasına olanak sağlamaktadır [6].

Çok durumlu modeller, kesikli durumlar ve olası geçişlerden oluşan stokastik süreç modelleridir [7, 8]. Çok durumlu yaşam çözümlemesi modelleri iki durumlu klasik yaşam çözümlemesi modellerinin genişletilmiş biçimidir. Çok durumlu modellerde son duruma gelinceye kadar ara durumlar söz konusudur. Kullanılan yazılımların gelişmesiyle birlikte Markov süreçlerin yanında Markov olmayan süreçler konusunda da çalışmalar yapılmıştır. Markov ve Markov olmayan çok durumlu süreçler hakkında ilk çalışmalar Cox [9], Lagakos [10], Aalen [11] tarafından yapılmıştır. Aalen ve Johansen [12] homojen olmayan Markov zincirlerinde geçiş matrisinin parametrik olmayan tahminlerinin elde edilmesi hakkında literatüre katkıda bulunmuşlardır.

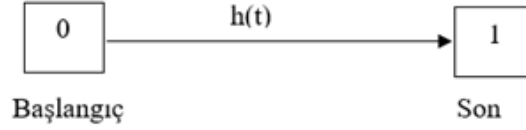
Courgeau ve Lelievre [13], Andersen ve ark. [7], Blossfeld ve Rohwer [14], Commenges [15], Hougaard [16], Hougaard [5], Andersen ve Keiding [17] çok durumlu modellerin yapısı ve gelişimi ile ilgili çalışmışlardır. Moreira ve ark. [18] üç durumlu modelde Aalen-Johansen tahmin edicisinin ön düzleştirilmesini yapmışlar ve sonuçları Aalen-Johansen tahmin edicisi ile kıyaslamışlardır.

Bu çalışmada geçiş olasılıklarının hesaplanması konusunda üç durumlu modeller için daha önce kullanılmayan alternatif bir yöntem uygulanarak, her bir tahmin edici için olasılık ve standart hata tahminleri elde edilmiştir. Üç durumlu modelde kullanılan tahmin edicilere düzeltme yapılarak yeni tahmin ediciler geliştirilmiş ve sonuçlar geçiş olasılığı ve standart hata tahminlerine göre literatürde yer alan diğer tahmin edicilerle karşılaştırılmıştır. Çalışmanın ikinci bölümünde çok durumlu modeller için temel tanım ve kavramlar verilmiştir. Çok durumlu modellerin yapıları ve geçiş olasılıklarını tahmin etme yöntemleri tanıtılmıştır. Üçüncü bölümde R programı Survidm paketinden alınan kolon kanseri verileri için farklı tahmin ediciler üzerinden geçiş olasılıkları ve standart hataları hesaplanarak, önerilen düzeltme yapılmıştır. Her bir tahmin edici kendi içinde düzeltilmiş hali ile karşılaştırılmıştır. Bütün tahmin ediciler üzerinden geçiş olasılıklarının genel karşılaştırması yapılarak önerilen düzeltilmiş tahmin edicinin uygulanabilirliği gösterilmiştir. Çalışmanın son bölümde ise sonuçlar hakkında genel değerlendirme yapılmıştır.

## 2. Çok durumlu modeller

En basit çok durumlu model başlangıç zamanındaki durumdan son duruma geçen, iki durumlu modeldir. Model yapısı Şekil 1'de verilmiştir. Bu modelde birim t zaman sonra son durum 1'e geçer [17,19]. İki durumlu modeller,  $p=2$  durumdan oluşan ve sadece 0 durumundan 1 durumuna geçişle sonlanan modellerdir. 0 durumundan 1 durumuna t zamanında geçiş yoğunluğu  $h_{01}(t)$ , tehlike fonksiyonu  $h(t)$  olur ve bütün t zamanlarında  $h_{10}(t) = 0$  olduğu için 1 durumu süreci sonlandıran başarısızlık durumudur. 0 durumunda ilk dağılım (initial distribution)  $\pi_0(0) = 1$  dir ve süreç Markov sürecidir.





Şekil 1. İki durumlu model

Yaşam çözümlemesi verisinde iki durumlu model için 0 durumundan 1 durumuna geçişteki tehlike fonksiyonu,

$$h(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{P(t \leq T < t + \Delta t | T \geq t)}{\Delta t} \quad (1)$$

ve yaşam fonksiyonu,

$$S(t) = P(T \geq t) = \exp \left( - \int_0^t h(u) du \right) \quad (2)$$

şeklinindedir [20]. Burada  $h(\cdot)$ , 0 durumundan 1 durumuna geçiş yoğunluğu ya da geçiş riskidir.

İki durumlu model için Kaplan - Meier (KM) tahmin edicisi ile yaşam fonksiyonu  $S(t)$  tahmin edilerek geçiş olasılıkları hesaplanmaktadır [21].

$n$  büyüklüğünde bir örneklem için tanımlanan olayın olma süreleri  $t_1 < t_2 < \dots < t_n$  şeklinde sıralansın ve her bir tanımlanan olayın gerçekleşme sürelerinde birden çok tanımlanan olay olduğu varsayalım.  $n_j$ ,  $t_j$ 'den önce risk altındaki bireylerin sayısı,  $d_j$ ;  $t_j$  anında tanımlanan olayın meydana geldiği bireylerin sayısı olmak üzere yaşam fonksiyonunun KM tahmin edicisi,

$$\hat{S}(t) = \prod_{t_j < t} \frac{n_j - d_j}{n_j} \quad (3)$$

şeklinde tanımlanmaktadır [21, 22].

Çok durumlu modellerde ise durumlar arasında birden çok geçiş söz konusudur. Çok durumlu modeller durumlar arasındaki geçiş yoğunluklarına yani tehlike fonksiyonlarına bağlı olarak tanımlanmaktadır.

Çok durumlu süreç, sonlu durum uzayında  $S = \{1, \dots, p\}$  stokastik bir süreçtir ( $X(t)$ ,  $t \in T$ ) ve sağdan süreklidir ( $X(t+) = X(t)$ ). Burada  $T = [0, \tau]$  ya da  $[0, \tau)$ ,  $\tau \leq +\infty$ 'dur. Sürecin başlangıç dağılımı  $\pi_i(0) = P(X(0) = i)$ ,  $i \in S$  olmak üzere geçiş olasılıkları,

$$P_{ij}(s, t) = P(X(t) = j | X(s) = i, X_{s-}) \quad (4)$$

biçimindedir. Burada  $i, j \in S$ ,  $s, t \in T$ ,  $s \leq t$  dir. Bu durumda geçiş yoğunlukları ise,

$$h_{ij}(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{P_{ij}(t, t + \Delta t)}{\Delta t} \quad (5)$$

biçimindedir. Birikimli geçiş yoğunluğu  $A_{ij}(t) = \int_0^t h_{ij}(u) du$  biçimindedir.

Bir  $i$  durumu ( $i \in S$ ), bütün  $t \in T$ ,  $j \in S$ ,  $j \neq i$ ,  $h_{ij}(t) = 0$  ise  $i$  durumu modelin son durumudur,  $i$  durumundan diğer durumlara tekrar dönüş söz konusu değildir, diğer durumlar ise geçici durum olarak tanımlanır ve

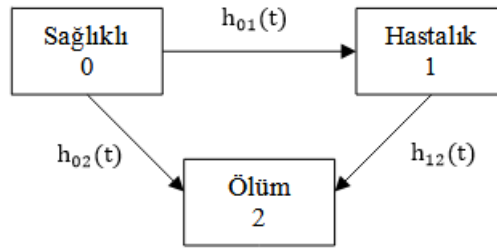
aralarında geçiş yapılabilir. Yani modeldeki son duruma geçişten sonra tekrar geriye dönüş söz konusu değildir.  $\pi_i(t) = P(X(t) = i)$  durum olasılıkları,

$$\pi_i(t) = \sum_{j \in S} \pi^j(0) P_{ji}(0, t) \quad (6)$$

şeklinde tanımlanır.

Modellerin genel yapısı durumlara ve aralarındaki olası geçişlere göre belirlenmektedir. Çok durumlu modeldeki geçiş yapıları diyagramlar kullanılarak ifade edilmektedir. Bu diyagramlarda kutular durumları ifade ederken, oklar ve yönleri ise durumlar arasındaki geçişleri göstermektedir [16]. Bütün durumlar numaralandırıldığında  $i$ 'den  $j$  durumuna geçiş " $i \rightarrow j$ " ile gösterilmektedir [6]. Durumlar geçiş durumu ya da yutucu son durum olabilir. Yutucu durum bir kere geçiş yaptıktan sonra tekrar çıkılamayan son durumdur (ölüm).

Üç durumlu model hastalık-ölüm modeli olarak da ifade edilmektedir. Şekil 2'de görüldüğü gibi başlangıç (sağlıklı) ve son durum (ölüm) arasında bir geçiş durumu (hastalık nüksetmesi, hasta olunması vb.) söz konusudur.



Şekil 2. Hastalık-ölüm modeli

Hastalık-ölüm modelinde geçiş olasılıkları,

$$P_{00}(s, t) = \exp\left(-\int_s^t (h_{02}(u) + h_{01}(u)) du\right),$$

$$P_{01}(s, t) = \left(\int_s^t P_{00}(s, u-) h_{01}(u) P_{11}(u, t) du\right)$$

ve

$$P_{11}(s, t) = \exp\left(-\int_s^t h_{12}(u) du\right) \quad (7)$$

biçiminde ifade edilir [17].

$S(t)$  yaşam fonksiyonu ve  $h(t)$  tehlike fonksiyonu olmak üzere, birikimli tehlike fonksiyonu  $H(t) = A(t) = \hat{\Lambda}(t) = \int_0^t h(s) ds$  şeklindedir [23].

Bir  $i$  durumundan  $j, \dots, k$  durumuna geçişin olduğu çok durumlu modellerde  $i$ . durumda yaşam fonksiyonu  $S_i(t) = e^{-\sum_{n=j}^k A_{in}}$  şeklindedir. Basit Markov modelinde geçiş olasılıklarının açık ifadesi,

$$P_{ij}(s, t) = P(t \text{ zamanında } j \text{ durumunda} / s \text{ zamanında } i \text{ durumunda}) \quad (8)$$

$$= P(X(t) = j | X(s) = i)$$

şeklindedir.

0, 1, ..., k durumdan oluşan bir Markov zinciri olsun.  $h_{ij}(t)$  geçiş yoğunlukları,  $P_{ij}(s, t)$  geçiş olasılıkları olmak üzere geçiş olasılık matrisi,

$$P(s, t) = \begin{pmatrix} P_{00}(s, t) & P_{01}(s, t) & \dots & P_{0k}(s, t) \\ P_{10}(s, t) & P_{11}(s, t) & \dots & P_{1k}(s, t) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ P_{k0}(s, t) & P_{k1}(s, t) & \dots & P_{kk}(s, t) \end{pmatrix}$$

şeklindedir ve  $P(s, t) = \prod_{s \leq u \leq t} (I + dA(u))$  biçiminde de yazılabilir. Burada  $A(t) = \{A_{ij}(t)\}$ ,  $A_{ii}(t) = -\sum_{j \neq i} A_{ij}(t)$  den oluşan birikimli geçiş yoğunluğu matrisidir [23].

Geçiş olasılıklarının tahmin edilmesinde kullanılan yöntemler aşağıda verilmiştir:

### 2.1. Aalen-Johansen tahmin edicisi

Geçiş olasılıklarının tahmin edilmesinde farklı yöntemler kullanılabilmesine rağmen literatürde en çok tercih edilen tahmin edici Aalen-Johansen (AJ) tahmin edicisidir [12]. Bu tahmin edici KM tahmin edicisinin matris formudur ve KM tahmin edicisinin Markov zincirlerine genişletilmiş halidir. AJ tahmin edicisi aşağıdaki gibidir:

$$\hat{P}(s, t) = \prod_{s \leq u \leq t} (I + \Delta \hat{A}(u)). \quad (9)$$

Burada  $\hat{A}(t) = \{\hat{A}_{ij}(t)\}$ ,  $\hat{A}_{ii}(t) = -\sum_{j \neq i} \hat{A}_{ij}(t)$  biçimindedir.

### 2.2. Yaşam verisi analizi tahmin edicisi

Meira-Machado ve ark. [24] hastalık ölüm modelinde geçiş olasılıklarının hesaplanması için KM ağırlıklarından yararlanarak ilk kez Markov olmayan bir tahmin edici geliştirmişlerdir. Bu tahmin edici de durdurulmuş veri koşulu gerekliliği üzerinde bir değişiklik yapılarak yaşam verisi analizi (Lifetime Data Analysis - LIDA) tahmin edicisi geliştirilmiştir [25].

$p_{12}(s, t)$  ve  $p_{22}(s, t)$  geçiş olasılıklarının tahmininde AJ'ye alternatif bir yaklaşım geliştirilmiştir.  $p_{11}(s, t)$  geçiş olasılığının yaşam fonksiyonu  $\hat{S}_{Z^0}(s)$  klasik KM tahmin edicisi ile elde edilmektedir ancak diğer geçişler ( $Z^0, T^0$ ) için hesaplanması daha zor olan  $E[\varphi((Z^0, T^0))]$  beklenen değerlerinin belli dönüşümleri ile elde edilir.

Yaşam dağılımlarının durdurma ve ilgili olayın gerçekleşmesi üzerindeki varsayımı bazı durumlarda bireyin takibinin zor olmasından dolayı karşılanamamaktadır. Bu duruma karşı de Una Alvarez ve Meira-Machado [25] tarafından tahmin edicilere düzeltme yapılmıştır. LIDA tahmin edicileri olarak ifade edilen bu tahmin ediciler aşağıda verilmiştir:

$$\hat{p}_{12}^{LIDA}(s, t) = \frac{\hat{S}_0(s) - \hat{S}_0(t) - \hat{E}(\gamma_{s,t}(Z, T))}{\hat{S}_0(s)} \quad (10)$$

$$\hat{p}_{22}^{LIDA}(s, t) = 1 - \frac{\hat{E}(\tilde{\gamma}_{s,t}(Z, T))}{\hat{S}(t) - \hat{S}_0(s)}.$$

Burada  $\gamma_{s,t}(u, v) = I(s < u \leq t, v > t)$  ve  $\tilde{\gamma}_{s,t}(u, v) = I(u \leq s, v > t)$  biçimindedir.

### 2.3. İşaretlenmiş (landmark) tahmin ediciler

Geçiş olasılıklarının tahmininde kullanılan bir başka yöntem işaretlenmiş (landmark - LM) tahmin edicilerdir. İşaretlenmiş tahmin ediciler belirli bir zaman noktasında işaretlenen zamanda bir durumdan diğerine geçme olasılığını tahmin etmek için kullanılmaktadır. İşaretlenmiş zaman noktasındaki durumlara göre gruplandırma yapılarak sonraki duruma geçiş olasılığı tahmin edilmektedir.

Alt örneklemeyle dayalı işaretleme olarak da adlandırılan bu yöntem  $i$  durumunda gözlemlenen bireylerin alt kümesini dikkate almaktır. Tahminler veri alt kümelerinden türetilen KM tahmin edicileri arasındaki farklara dayanmaktadır [26].

$s$  zamanında birinci durumda sınırlandırılmış  $p_{1j}(s, t)$  ( $j=1,2,3$ ) olsun.  $S_1 = \{i: Z_i > s\}$  kümesinde  $C$  durdurma zamanı  $Z$ 'den bağımsızdır [25].  $\tilde{Z} > s$  alt örnekleminde  $C(Z, T)$  ikilisinden bağımsız olduğu için KM'ye dayalı tahmin tutarlı sonuç verir. Benzer şekilde  $s$  zamanında ikinci durumda  $S_2 = \{i: \tilde{Z}_i \leq s \leq \tilde{T}_i\}$  sınırlandırılmış  $p_{2j}(s, t)$  ( $j=2,3$ ), geçiş olasılıkları olsun. Bu durumda geçiş olasılıkları için LM tahmin edicileri aşağıda verilmiştir [27]:

$$\begin{aligned}\hat{p}_{12}^{LM}(s, t) &= \hat{S}_0^{(s)}(t), \\ \hat{p}_{13}^{LM}(s, t) &= \hat{S}^{(s)}(t), \\ \hat{p}_{23}^{LM}(s, t) &= \hat{S}^{[s]}(t).\end{aligned}\tag{11}$$

$\hat{S}_0^{(s)}$  birinci durumdaki  $S_1$  alt örneklemlerinden hesaplanan KM tahmin edicisi,  $\hat{S}^{(s)}$  aynı alt örneklemdaki toplam süredeki KM tahmin edicisi ve  $\hat{S}^{[s]}(t)$ ,  $S_2$  alt örneklemlerinden elde edilen toplam süredeki KM tahmin edicisidir.

Putter ve Spitoni [28] alt örnekleme çalışması fikrinden yola çıkarak AJ tahmin edicisine alternatif olarak işaretlenmiş AJ (LMAJ) tahmin edicisini geliştirmişlerdir. Alt örneklemeyle AJ tahmin edicisine uyarlanmış ve LMAJ tahmin edicisini geliştirmişlerdir.

Simülasyon çalışmalarında LM ve LMAJ'ın benzer sonuçlar gösterdiğini ortaya koymuşlardır.  $p_{11}(s, t)$ ,  $p_{22}(s, t)$  ve  $p_{23}(s, t)$  geçiş olasılıkları her iki tahmin edici için de eşdeğer sonuçlar vermiştir. Bu tahmin ediciler özellikle küçük örneklemlerde ve durdurulmuş verinin fazla olduğu bazı durumlarda büyük standart hatalara sahip olabilmektedirler. Bu durumun önüne geçebilmek için ön düzgünleştirme yapılabilir. LM ve LMAJ tahmin edicileri yerine ön düzgünleştirilmiş LM (PLM) ve ön düzgünleştirilmiş LMAJ (PLMAJ) tercih edilebilir [29].

### 2.4. Ön düzgünleştirilmiş tahmin ediciler

Geçiş olasılıklarının tahmininde kullanılan bir diğer etkili yöntem tahmin edicilerde düzeltme yapılmasıdır. Dikta [30] KM tahmin edicisinde durdurulmuş verilerin yerine ön düzgünleştirilmiş veri tahmini yerleştirerek tahmin yapılmasını önermiştir. Durdurulmuş veriler için düzgünleştirilmiş veriler tahmin edilir ve durdurulmuş veriler yerine üretilen bu yeni veriler kullanılır.

Ön düzgünleştirme işlemi ile veri setinde durdurulmuş veriler için bir modifikasyon yapılarak tahmin üretilmektedir. Başlangıç düzgünleştirme lojistik gibi belli parametrik dağılım ailesine dayandırılabilir gibi, parametrik olmayan iki değişkenli regresyon eğrilerinden de elde edilebilmektedir. Parametrik dağılım kullanılması durumunda yarı parametrik bir tahmin edici elde edilmektedir.

Markov olmayan modeller için Amorim ve ark. [31] ön düzgünleştirilmiş geçiş olasılıkları için bir tahmin edici önermiştir. Moreira [23] hastalık ölüm modelinde AJ tahmin edicisi üzerinde ön düzgünleştirme yapmış ve ön düzgünleştirilmiş AJ (PAJ) tahmin edicisini geliştirmiş, tahmin edicileri

simülasyon ile karşılaştırmıştır. Küçük örneklem büyüklüklerinde ve yüksek oranda durdurulmuş veri varlığında ön düzgünleştirme işleminin iyi bir alternatif çözüm olduğu ifade edilmiştir.

Ön düzgünleştirme ile tahmin edicide durdurulmuş verilerin yerine ön düzgünleştirilmiş tahminler yerleştirilmektedir. Geçiş olasılığının ön düzgünleştirilmiş versiyonunda durdurulmuş verilerin yerine düzgünleştirilmiş ikili regresyon (binary regression) fonksiyonu  $m_0(z) = P(\Delta_1 = 1 | \tilde{Z} = z)$  yerleştirilir. Burada  $m_0(z)$  ikili regresyon fonksiyonunun bir tahmin edicisidir. Ön düzgünleştirmenin ana mantığı her durdurulmuş verinin yerine ikili regresyon/lojistik regresyon ile düzgünleştirilmiş bir tahminini yapmak ve bu tahmin ile durdurulmuş verinin yer değiştirmesidir.

### 2.5. Düzeltilmiş geçiş olasılığı tahmin edicileri

Bu çalışmada Zaman ve ark. [32] tarafından iki durumlu modeller için önerilen düzeltilmiş olasılık ve varyans tahmin edicileri üç durumlu hastalık ölüm modelinde kullanılmış ve verilen tüm yöntemlerde durumlar arası geçişler için olasılık ( $p_{11}$ ,  $p_{12}$ ,  $p_{13}$ ,  $p_{22}$  ve  $p_{23}$ ) ve standart hata değerleri hesaplanmıştır. KM yaşam fonksiyonu üzerinden daralan (shrunken) varyans tahmini yapılması konusunda Borkowf [33] bir tahmin edici önermiştir. Zaman ve ark. [32] iki durumlu modeller için yaşam fonksiyonu ve varyansın hesaplanması için daralan KM yaşam fonksiyonundan yola çıkarak yaşam olasılığı ve varyansı için aşağıdaki düzeltilmiş tahmin edicileri önermişlerdir:

$$\hat{S}_{Düz.}(t) = \left(1 - \frac{1}{\sqrt{n}}\right) \hat{S}(t) + \frac{1}{(2n)^2}, \quad (12)$$

$$\text{Var}[\hat{S}_{Düz.}(t)] = \left(1 - \frac{1}{\sqrt{n}}\right)^2 \text{Var}[\hat{S}(t)].$$

Burada Greenwood formülünün uygulanması ile önerilen düzeltilmiş varyans tahmin edicisi;

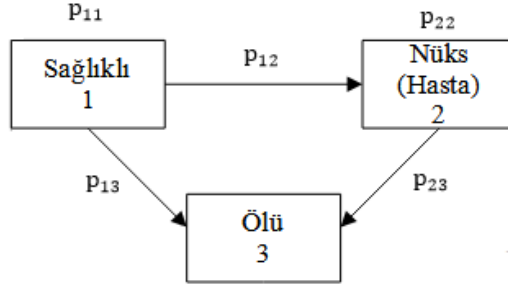
$$\text{Var}(\hat{S}_{Düz.}(t)) = (\hat{S}(t))^2 \left(1 - \frac{1}{\sqrt{n}}\right)^2 \sum_{j=1}^k \frac{d_j}{n_j(n_j - d_j)} \quad (13)$$

şeklinde ifade edilmektedir. Önerilen düzeltilmiş tahmin edicinin özellikle dağılımın kuyruklarında daha iyi sonuçlar verdiği görülmüştür [32].

Bu çalışmada üç durumlu modeller için kullanılan bütün tahmin ediciler üzerinden düzeltme yapılmıştır. Düzeltilmiş geçiş olasılığı ve düzeltilmiş standart hata tahminleri elde edilmiştir. Yapılan düzeltmenin etkinliğinin incelenmesi için elde edilen sonuçlar üzerinden tahmin ediciler kendi içlerinde ve birbirleriyle karşılaştırılmıştır.

### 3. Uygulama

Yöntemlerin uygulanabilirliğini göstermek amacıyla geçiş olasılıklarının ve standart hata tahminlerinin elde edilmesi için R programı Survidm paketinde yer alan 929 kişiden oluşan 3. evre kolon kanseri verisi (colonIDM) kullanılmıştır [34]. Kolon kanseri olan kişiler ameliyat edilerek tedavi edilmiş ve sonraki süreç takip edilmiştir. Modelin yapısı Şekil 3'de verilmiş olup, model sağlıklı (ameliyat sonrası sağlıklı), nüks (hasta) ve ölü olmak üzere üç durumlu bir hastalık ölüm modelidir. Geçişler 1'den 2'ye, 1'den 3'e ve 2'den 3'e şeklinde gerçekleşmektedir.



Şekil 3. Kolon kanseri verisi model yapısı

Şekil 3’de verilen model yapısında,

- $p_{11}$ ; sağlıklı olan kişilerin çalışma boyunca sağlıklı olarak kalma olasılığını,
- $p_{12}$ ; sağlıklı olan kişilerin hastalığının nüksetmesi olasılığını,
- $p_{13}$ ; sağlıklı olan kişilerin ölmesi olasılığını,
- $p_{22}$ ; hastalığı nüksetmiş kişilerin nükste kalması olasılığını,
- $p_{23}$ ; hastalığı nükseden kişilerin ölmesi olasılığını ifade etmektedir.

Geçiş olasılığı ve standart hata tahminlerinde kullanılan yöntemlerin kısaltmalarının açıklamaları aşağıda verilmiştir:

- AJ; Aalen-Johansen,
- PAJ; Ön düzgünleştirilmiş (Presmoothed) Aalen-Johansen,
- LIDA; Yaşam verisi analizi (Lifetime Data Analysis),
- LM; İşaretlenmiş (Landmark),
- PLM; Ön düzgünleştirilmiş işaretlenmiş (Presmoothed Landmark),
- LMAJ; İşaretlenmiş (Landmark) Aalen-Johansen,
- PLMAJ; Ön düzgünleştirilmiş İşaretlenmiş (Presmoothed Landmark) Aalen-Johansen.

Çalışmadaki 929 hastanın 468’inde (%50) kanser nüksetmiş ve kanser nükseden hastaların 414’ü (%45) ölmüştür. 38 hasta (%4) ise nüks olmadan ölmüştür. Bu durumda çalışma sonunda toplam 452 hasta (%49) ölmüştür. Ayrıca çalışma sonunda 423 kişi (%46) sağlıklı kalmış ve kanseri nükseden 54 kişi de (%0.06) hayatta kalmıştır (Çizelge 1).

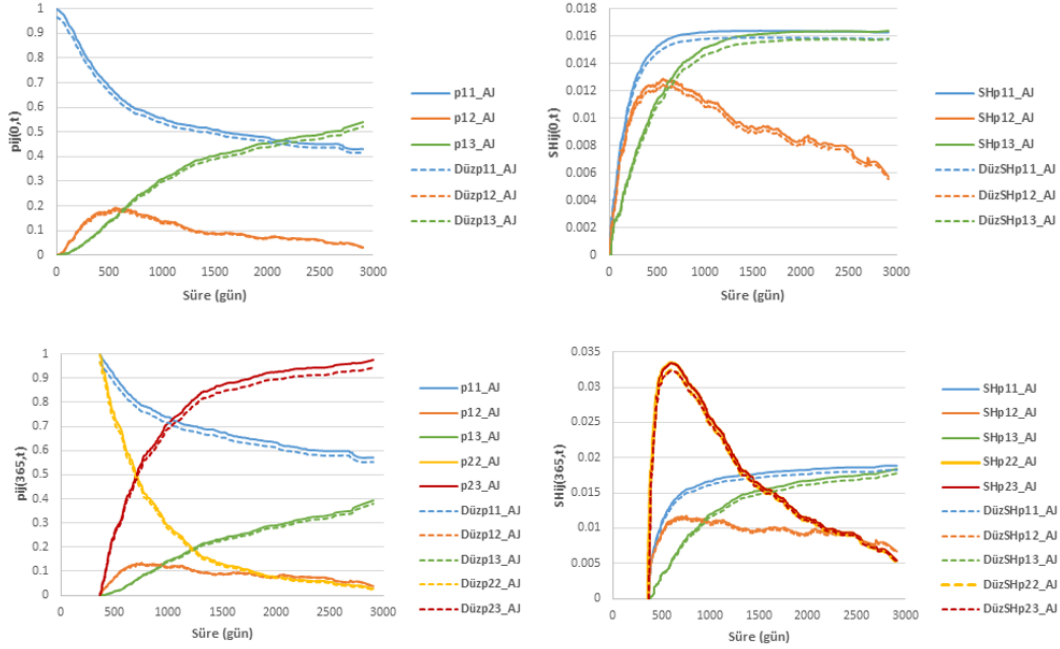
Çizelge 1. Kolon kanseri verisinde durumlar arası geçiş dağılımı

İlk durum	Son durum			Toplam
	Sağlıklı	Nüks	Ölü	
Sağlıklı	423	468	38	929
Nüks	0	54	414	468

AJ, PAJ, LIDA, LM, PLM, LMAJ ve PLMAJ tahmin edicileri üzerinden geçiş olasılıkları ve standart hata tahminleri R programında Survidm paketinden yararlanılarak hesaplanmıştır. Bütün tahmin edicilere düzeltme yapılarak, sonuçlar belli zaman noktalarında karşılaştırılmış ve hem düzeltilmiş tahmin edicinin etkinliği hem de en iyi sonucu veren tahmin edici araştırılmıştır.  $s=0$  ve  $s=365$  zaman noktaları seçilerek hesaplamalar yapılmış ve grafikler çizilmiştir.  $s=0$  başlangıç zamanında gözlemlerin ilk durumda olduğu varsayıldığı için bu zaman noktasındaki ikinci durumdan üçüncü duruma geçiş ve üçüncü durumda kalma olasılık ve standart hata değerleri hesaplanmamıştır.

AJ, PAJ, LIDA, LM, PLM, LMAJ ve PLMAJ yöntemleri için hesaplanan geçiş olasılıkları üzerinden düzeltilmiş tahmin edici yöntemi ile geçiş olasılıkları ve standart hatalara düzeltme yapılmış ve

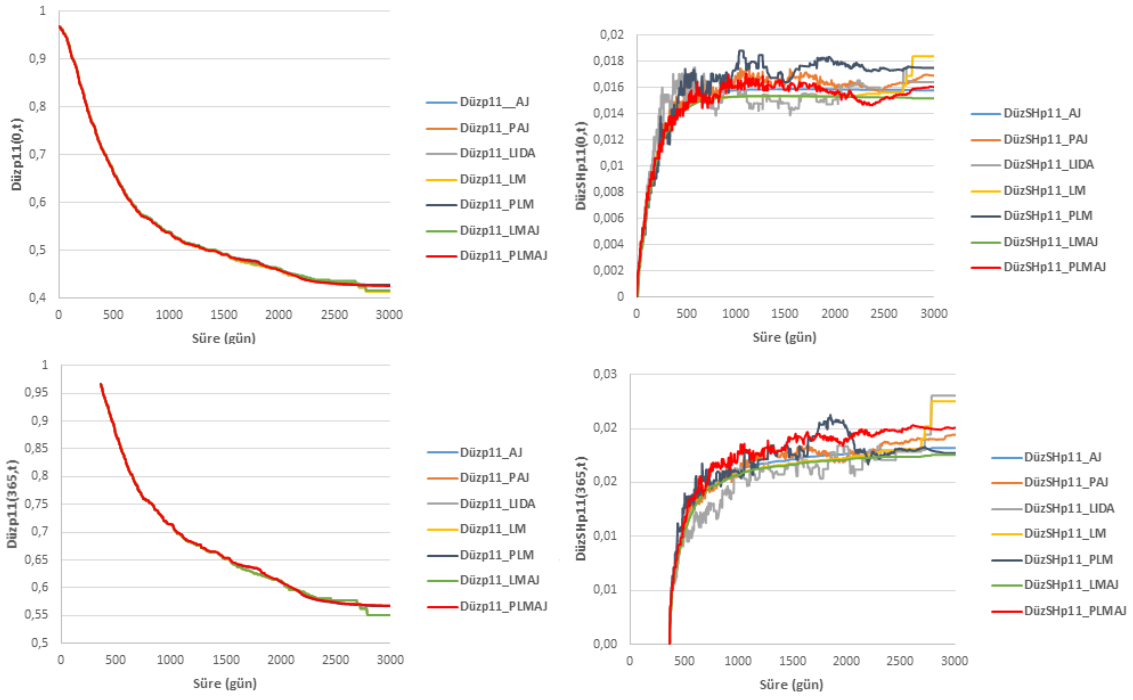
düzeltilmiş tahmin edicilerin sonuçları karşılaştırılmıştır. Şekil 4'te verilen AJ tahmin edicisinin sonuçlarına bakıldığında AJ tahmin edicisinin düzeltilmiş olasılık ve standart hata değerleri daha düşük elde edilmiştir. Diğer tahmin ediciler için de düzeltilmiş olasılık ve standart hata değerleri daha düşük bulunmuştur.



**Şekil 4.**  $s=0$  ve  $s=365$  için AJ ve düzeltilmiş AJ tahmin edicilerinin olasılık ve standart hata grafiği

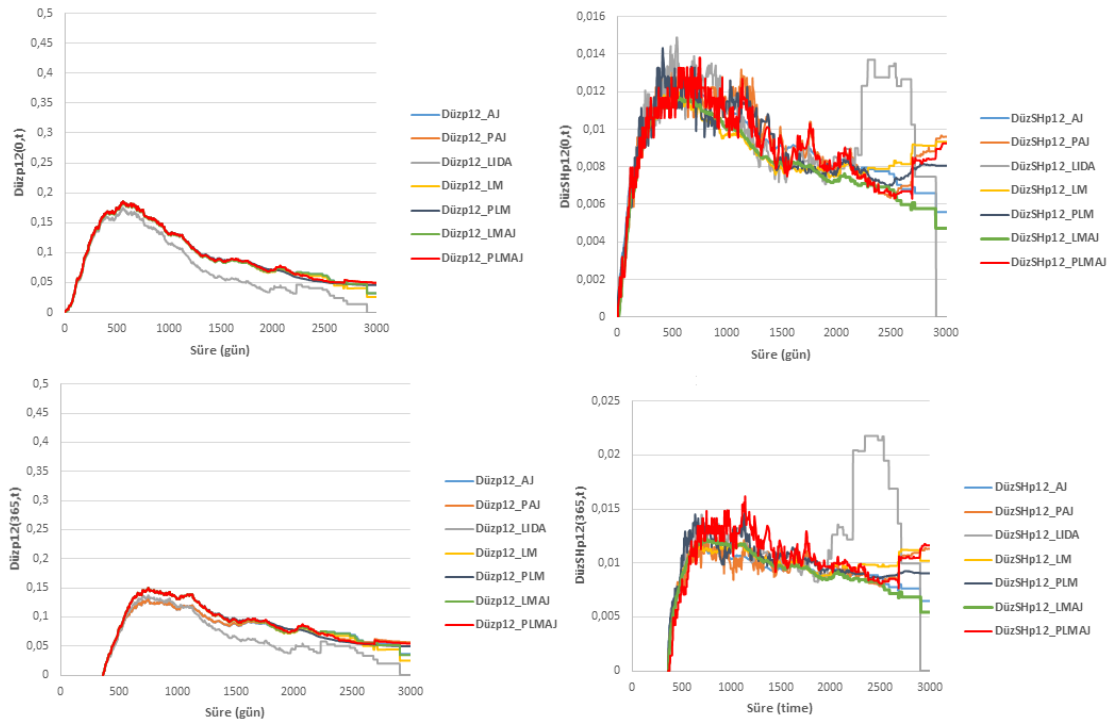
$p_{11}$ ,  $p_{12}$ ,  $p_{13}$ ,  $p_{22}$  ve  $p_{23}$  geçiş olasılıkları için genel olarak en iyi tahmin ediciyi bulmak amacıyla düzeltilmiş AJ, PAJ, LIDA, LM, PLM, LMAJ ve PLMAJ tahmin edicileri karşılaştırılmıştır.

Şekil 5 incelendiğinde  $p_{11}$  geçiş olasılığının en düşük standart hataya sahip düzeltilmiş tahmin edicilerin  $s=0$  için Düz\_LIDA ve Düz\_LMAJ,  $s=365$  için Düz\_LIDA olduğu görülmektedir.



Şekil 5.  $s=0$  ve  $s=365$  için  $p_{11}$  geçiş olasılığı düzeltilmiş tahmin edicilerin olasılık ve standart hata grafiği

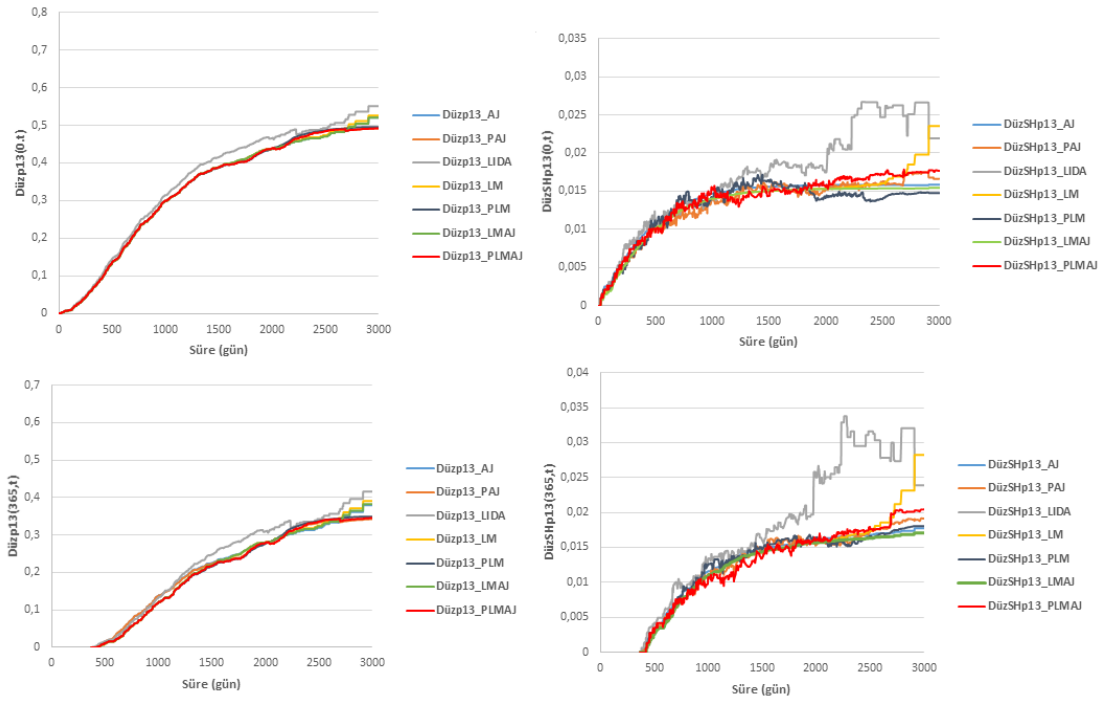
Şekil 6 incelendiğinde  $p_{12}$  geçiş olasılığının en düşük standart hataya sahip düzeltilmiş tahmin edicilerinin  $s=0$  için Düz\_LMAJ ve Düz\_LM,  $s=365$  için Düz\_PAJ ve Düz\_LMAJ olduğu görülmektedir.



Şekil 6.  $s=0$  ve  $s=365$  için  $p_{12}$  geçiş olasılığı düzeltilmiş tahmin edicilerin olasılık ve standart hata grafiği

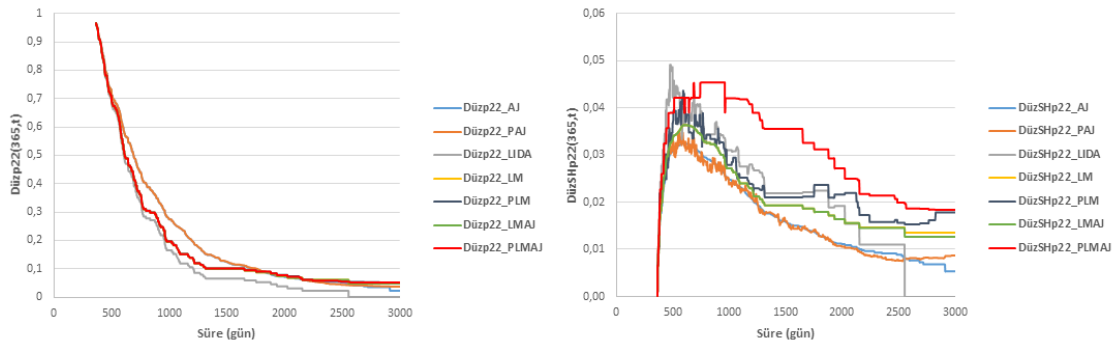


Şekil 7 incelendiğinde  $p_{13}$  geçiş olasılığının en düşük standart hataya sahip düzeltilmiş tahmin edicilerinin  $s=0$  için Düz\_PAJ ve Düz\_PLM,  $s=365$  için Düz\_LMAJ ve Düz\_PLMAJ olduğu görülmektedir.



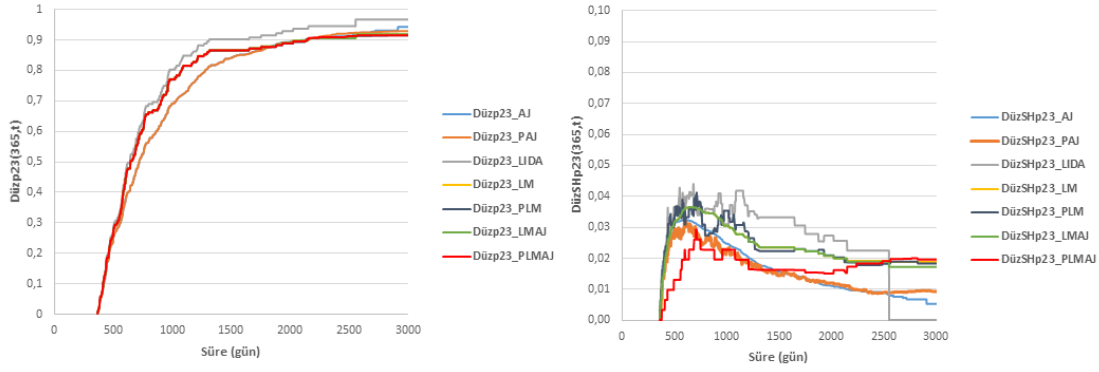
Şekil 7.  $s=0$  ve  $s=365$  için  $p_{13}$  geçiş olasılığı düzeltilmiş tahmin edicilerin olasılık ve standart hata grafiği

Şekil 8 incelendiğinde  $s=365$  için  $p_{22}$  geçiş olasılığının en düşük standart hataya sahip tahmin edicinin Düz\_PAJ olduğu görülmektedir.



Şekil 8.  $s=365$  için  $p_{22}$  geçiş olasılığı düzeltilmiş tahmin edicilerin olasılık ve standart hata grafiği

Şekil 9 incelendiğinde  $s=365$  için  $p_{23}$  geçiş olasılığının en düşük standart hataya sahip tahmin edicilerinin Düz\_PAJ ve Düz\_PLMAJ olduğu görülmektedir.



**Şekil 9.**  $s=365$  için  $p_{23}$  geçiş olasılığı düzeltilmiş tahmin edicilerin olasılık ve standart hata grafiği

Kullanılması önerilen düzeltilmiş tahmin ediciler daha düşük standart hata değerlerine sahiptir.  $p_{11}$ ,  $p_{12}$ ,  $p_{13}$ ,  $p_{22}$  ve  $p_{23}$  geçiş olasılıklarına göre en düşük standart hata değerlerine sahip düzeltilmiş tahmin ediciler Çizelge 2’de verilmiştir.

**Çizelge 2.** Geçiş olasılıklarına göre en iyi sonucu veren tahmin ediciler

Geçiş Olasılığı	$s=0$ gün	$s=365$ gün
$p_{11}$	Düz_LIDA/Düz_LMAJ	Düz_LIDA
$p_{12}$	Düz_LMAJ/ Düz LM	Düz PAJ/ Düz_LMAJ
$p_{13}$	Düz_PLM/ Düz PAJ	Düz_LMAJ/ Düz_PLMAJ
$p_{22}$		Düz PAJ
$p_{23}$		Düz_PLMAJ/ Düz PAJ

AJ, PAJ, LIDA, LM, PLM, LMAJ ve PLMAJ tahmin edicilerinin olasılık ve standart hata değerleri hesaplanmıştır. Bu tahmin ediciler üzerinden iki durumlu modeller için Zaman ve ark. [32] tarafından önerilen tahmin ediciden yararlanarak üç durumlu hastalık-ölüm modeli için düzeltilmiş tahmin edicilerin kullanılması önerilmiş ve  $p_{11}$ ,  $p_{12}$ ,  $p_{13}$ ,  $p_{22}$  ve  $p_{23}$  geçiş olasılıkları için en düşük standart hatayı veren tahmin ediciler araştırılmıştır. AJ, PAJ, LIDA, LM, PLM, LMAJ ve PLMAJ tahmin edicilerine yapılan düzeltmeler sonucu standart hata değerleri daha düşük elde edilmiştir.

Elde edilen sonuçlara göre düzeltilmiş tahmin edicilerin bazı olasılık ve standart hata değerleri Çizelge 3’de verilmiştir. Çizelge 2’de verilen sonuçlara göre Çizelge 3’de  $s=0$  ve  $s=365$  başlangıç zamanlarına göre yorumlar yapılmıştır.

$s=0$  başlangıç zamanında bütün bireylerin birinci durumda olduğu kabul edilmektedir. Bu nedenle sadece birinci durumdan ikinci ve üçüncü duruma geçiş yapılabilir.  $s=0$  için bazı olasılık değerleri aşağıda verilmiştir:

$p_{11}$  için en iyi tahmin edici olan Düz\_LMAJ değerlerinden, sıfırıncı günde yaşayan bir bireyin 365. günde (1 yıl) yaşıyor olma olasılığı 0.729 (SH=0.0134), altıncı yılda (2197 gün) yaşama olasılığı 0.447’dir (SH=0.0153).

$p_{12}$  için en iyi tahmin ediciler olan Düz\_LMAJ ya da Düz\_LM değerlerinden sıfırıncı günde yaşayan bir bireyin bir yıl sonra hastalığının nüksetme olasılığı 0.158 (SH=0.0109), altıncı yılda hastalığının nüksetmesi olasılığı 0.065’dir (SH=0.0701).

$p_{13}$  için en iyi tahmin edici olan Düz\_PLM değerlerinden sıfırıncı günde yaşayan bir bireyin bir yıl sonra ölmesi olasılığı 0.081 (SH=0.00749), altıncı yılda ölmesi olasılığı 0.464’dür (SH=0.0145).

$s=365$  için (birinci yıldan sonraki geçişlerin) bazı olasılık değerleri aşağıda verilmiştir:

$p_{11}$  için en iyi tahmin edici olan Düz\_LIDA değerlerinden birinci yılda yaşayan bir bireyin bir yıl sonra ( $t=730$ ) yaşama olasılığı 0.77 ( $SH=0.0125$ ), üç yıl sonra ( $t=1455$ ) yaşama olasılığı 0.658'dir ( $SH=0.0162$ ).

$p_{12}$  için en iyi tahmin edici olan Düz\_PAJ değerlerinden; birinci yılda yaşayan bir bireyin bir yıl sonra hastalığının nüksetmesi olasılığı 0.126 ( $SH=0.0110$ ), üç yıl sonra nüksetmesi olasılığı 0.086'dır ( $SH=0.00894$ ).

**Çizelge 3.** En iyi sonucu veren tahmin edicilerin bazı olasılık ve standart hata değerleri

	$p_{11} \pm SHp_{11}$	$p_{12} \pm SHp_{12}$	$p_{13} \pm SHp_{13}$	$p_{22} \pm SHp_{22}$	$p_{23} \pm SHp_{23}$
<b>s=0, t=365 gün</b>					
Düz_AJ	0.728±1.37E-02	0.158±1.17E-02	0.081±8.80E-03		
Düz_PAJ	0.728±1.38E-02	0.158±1.12E-02	0.081±8.05E-03		
Düz_LIDA	0.728±1.54E-02	0.152±1.13E-02	0.087±9.28E-03		
Düz_LM	<b>0.728±1.34E-02</b>	<b>0.158±1.09E-02</b>	0.081±7.93E-03		
Düz_PLM	0.728±1.44E-02	0.158±1.28E-02	<b>0.081±7.49E-03</b>		
Düz_LMAJ	<b>0.729±1.34E-02</b>	<b>0.158±1.09E-02</b>	0.080±7.89E-03		
Düz_PLMAJ	0.728±1.38E-02	0.158±1.12E-02	0.081±8.49E-03		
<b>s=0, t=2197 gün</b>					
Düz_AJ	0.446±1.58E-02	0.065±7.86E-03	0.456±1.58E-02		
Düz_PAJ	0.442±1.62E-02	0.065±7.83E-03	0.460±1.54E-02		
Düz_LIDA	0.446±1.62E-02	0.032±8.64E-03	0.489±2.11E-02		
Düz_LM	0.446±1.54E-02	0.063±7.64E-03	0.458±1.55E-02		
Düz_PLM	0.442±1.78E-02	0.060±7.99E-03	<b>0.464±1.45E-02</b>		
Düz_LMAJ	<b>0.447±1.53E-02</b>	<b>0.065±7.01E-03</b>	0.455±1.53E-02		
Düz_PLMAJ	0.442±1.54E-02	0.065±7.40E-03	0.460±1.67E-02		
<b>s=365, t=730 gün</b>					
Düz_AJ	0.770±1.47E-02	0.126±1.11E-02	0.071±7.93E-03	0.453±3.06E-02	0.514±3.06E-02
Düz_PAJ	0.770±1.44E-02	<b>0.126±1.10E-02</b>	0.072±7.41E-03	<b>0.453±2.89E-02</b>	0.514±2.76E-02
Düz_LIDA	<b>0.770±1.25E-02</b>	0.132±1.36E-02	0.065±1.00E-02	0.351±4.05E-02	0.617±3.40E-02
Düz_LM	0.770±1.45E-02	0.143±1.11E-02	0.054±7.25E-03	0.375±3.47E-02	0.592±3.59E-02
Düz_PLM	0.770±1.55E-02	0.142±1.34E-02	0.055±7.76E-03	0.375±3.61E-02	0.592±3.66E-02
Düz_LMAJ	<b>0.770±1.45E-02</b>	0.143±1.19E-02	<b>0.054±7.24E-03</b>	0.375±3.47E-02	0.592±3.59E-02
Düz_PLMAJ	0.770±1.60E-02	0.143±1.20E-02	0.055±7.74E-03	0.375±4.22E-02	<b>0.592±2.60E-02</b>
<b>s=365, t=1455 gün</b>					
Düz_AJ	0.658±1.71E-02	0.086±9.29E-03	0.223±1.47E-02	0.129±1.60E-02	0.838±1.60E-02
Düz_PAJ	0.659±1.78E-02	<b>0.086±8.94E-03</b>	0.222±1.50E-02	<b>0.130±1.57E-02</b>	<b>0.837±1.58E-02</b>
Düz_LIDA	<b>0.658±1.62E-02</b>	0.064±1.05E-02	0.245±1.70E-02	0.065±2.20E-02	0.902±3.33E-02
Düz_LM	0.658±1.66E-02	0.091±9.74E-03	0.218±1.44E-02	0.102±1.93E-02	0.865±2.34E-02
Düz_PLM	0.659±1.84E-02	0.094±1.03E-02	0.214±1.48E-02	0.102±2.09E-02	0.865±2.23E-02
Düz_LMAJ	0.658±1.66E-02	0.091±9.56E-03	<b>0.218±1.43E-02</b>	0.102±1.93E-02	0.865±2.34E-02
Düz_PLMAJ	0.659±1.87E-02	0.092±9.77E-03	0.216±1.43E-02	0.102±3.56E-02	0.865±1.62E-02

$p_{13}$  için en iyi tahmin edici olan Düz\_LMAJ değerlerinden birinci yılda yaşayan bir bireyin bir yıl sonra ölmesi olasılığı 0.054 ( $SH=0.00724$ ), üç yıl sonra ölmesi olasılığı 0.218'dir ( $SH=0.0143$ ).

$p_{22}$  için en iyi tahmin edici olan Düz\_PAJ değerlerinden birinci yılda hastalığı nükseden bir bireyin bir yıl sonra nüksemiş şekilde kalması olasılığı 0.453 (SH=0.0289), üç yıl sonra da nüksemiş şekilde kalması olasılığı 0.13'dür (SH=0.0157).

$p_{23}$  için en iyi tahmin edici olan Düz\_PLMAJ ya da Düz\_PAJ değerlerinden birinci yılda hastalığı nükseden bir bireyin bir yıl sonra ölmesi olasılığı 0.592 (SH=0.0260), üç yıl sonra ölmesi olasılığı 0.837'dir (SH=0.0158).

Tez çalışmasında kolon kanseri verisi dışında kalp nakli, meme kanseri ve serviks kanseri verileri ile de çalışılmış ve benzer sonuçlar elde edilmiştir [35].

#### 4. Sonuç

Literatürde çoğunlukla iki durumlu (yaşıyor-ölü) çalışmalar mevcuttur. Üç durumlu (sağlıklı-hasta-ölü) çalışmalarla da karşılaşılmaktadır. Bu çalışmalar hastalık-ölüm modeli çalışmaları olarak ifade edilmektedir. Bu çalışmada hastalık-ölüm modellerinde kullanılan tahmin ediciler ele alınmıştır. Çok durumlu modellerde yaşam fonksiyonlarının ve standart hataların elde edilmesi genellikle Markov varsayımı altında yapılmaktadır. Sürecin Markov olup olmamasından bağımsız olarak tahminlerin yapılması için kullanılan tahmin ediciler yazılım süreçlerinin de ilerlemesi ile birlikte son yıllarda geliştirilmiştir. Bu alandaki literatür Markov modellere göre daha kısıtlıdır.

Bu çalışma ile kolon kanseri verisi kullanılarak AJ, PAJ, LIDA, LM, PLM, LMAJ ve PLMAJ tahmin edicileri ile geçiş olasılıkları ve standart hataları hesaplanmıştır. Literatürdeki çalışmalarda bu tahmin edicileri bir arada karşılaştıran bir çalışmaya rastlanmamıştır. İki durumlu modeller için önerilen tahmin ediciden yararlanarak, üç durumlu hastalık-ölüm modeli için literatürde kullanılan bu yedi tahmin edici üzerinden düzeltilmiş tahmin edicilerin olasılık ve standart hata değerleri hesaplanmış ve  $p_{11}$ ,  $p_{12}$ ,  $p_{13}$ ,  $p_{22}$  ve  $p_{23}$  geçiş olasılıkları için en düşük standart hatayı veren tahmin ediciler araştırılmıştır.

Kolon kanseri verisinde AJ, PAJ, LIDA, LM, PLM, LMAJ ve PLMAJ tahmin edicilerine yapılan düzeltmeler sonucu elde edilen Düz\_AJ, Düz\_PAJ, Düz\_LIDA, Düz\_LM, Düz\_PLM, Düz\_LMAJ ve Düz\_PLMAJ tahmin edicilerin standart hataları daha düşük elde edilmiştir.

Düzeltilmiş sonuçlara göre en düşük standart hataya sahip tahmin ediciler üzerinden geçiş olasılıkları ve standart hata değerleri incelenmiştir. Başlangıç zamanında yani sıfırıncı günde yaşayan bir bireyin birinci yılda yaşama olasılığı 0.729 (SH=0.0134), altıncı yılda yaşama olasılığı 0.447'dir (SH=0.0153). Başlangıç zamanında yaşayan bir bireyin birinci yılda ölmesi olasılığı çok düşükken zaman ilerledikçe ölmesi olasılığı daha da artmaktadır. Birinci yılda kanseri nüksemiş bir bireyin bir yıl sonra ölmesi olasılığı 0.592 (SH=0.0260), üç yıl sonra ölmesi olasılığı ise 0.837'dir (SH=0.0158).

#### Kaynaklar

- [1] J. D. Kalbeisch, R. L. Prentice, 1980, *The Statistical Analysis of Failure Time Data*, John Wiley & Sons., New York.
- [2] D.R. Cox, D. Oakes, 1984, *Analysis of Survival Data*, Chapman and Hall, New York.
- [3] A. Hamerle, 1989, Multiple-spell regression models for duration data, *Applied Statistics*, 38, 127-138.
- [4] J. P. Klein, M. L. Moeschberger, 1997, *Survival Analysis Techniques for Censored and Truncated Data*, Springer, New York.
- [5] P. Hougaard, 2000, *Analysis of Multivariate Survival Data*, Statistics for Biology and Health, Springer-Verlag, New York.

- [6] H. Putter, M. Fiocco, B. Geskus, 2007, Tutorial in biostatistics: Competing risks and multi-state models, *Statistics in Medicine*, 26, 2389-2430.
- [7] P.K. Andersen, Ø. Borgan, R.D. Gill, N. Keiding, 1993, *Statistical Models Based on Counting Processes*, Springer-Verlag, New York.
- [8] L. Meira-Machado, C. Cadarso Suarez, J. de Una Alvarez, P. Andersen, 2009, Multi-state models for the analysis of time to event data, *Statistical Methods in Medical Research*, 18 (2), 195-222.
- [9] D.R. Cox, 1972, Regression models and life-tables, *Journal of Royal Statistical Society, Series B* 34, 187-220.
- [10] S.W. Lagakos, 1976, A stochastic model for censored-survival data in the presence of an auxiliary variable, *Biometrics*, 32, 551-559.
- [11] O.O. Aalen, 1978, Nonparametric inference for a family of counting processes, *Annals of Statistics*, 6, 701-726.
- [12] O.O. Aalen, S. Johansen, 1978, An empirical transition matrix for nonhomogeneous Markov chains based on censored observations, *Scandinavian Journal of Statistics*, 5, 141-150.
- [13] D. Courgeau, E. Lelievre, 1992, *Event History Analysis in Demography*, Clarendon Press, Oxford.
- [14] H.P. Blossfeld, G. Rohwer, 1995, *Techniques of Event History Modeling*, Lawrence Erlbaum Associates, New Jersey.
- [15] D. Commenges, 1999, Multi-state models in epidemiology, *Lifetime Data Analysis*, 5, 315-27.
- [16] P. Hougaard, 1999, Multi-state models: A review, *Lifetime Data Analysis*, 239-264.
- [17] P.K. Andersen, N. Keiding, 2002, Multi-state models for event history analysis, *Statistical Methods in Medical Research*, 11, 91-115.
- [18] A. Moreira, J. de Una-Alvarez, L. Machado, 2013, Presmoothing the Aalen-Johansen estimator in the illness-death model, *Electronic Journal of Statistics*, 7, 1491-1516.
- [19] J. Beyersmann, A. Allignol, M. Schumacher, 2012, *Competing Risks and Multistate Models with R*, Springer Science+Business Media, London.
- [20] D.G. Kleinbaum, M. Klein, 2010, *Survival Analysis (Vol. 3)*, Springer, New York.
- [21] E. Kaplan, P. Meier, 1958, Nonparametric estimation from incomplete observations, *Journal of the American Statistical Association*, 53(282), 457-481.
- [22] D. Collett, 2003, *Modeling Survival Data in Medical Research. 2nd Edition*, Chapman & Hall., New York.
- [23] A. Moreira, 2014, *Methods for Analysis of Multi-state Survival Data*, Phd thesis, Universidade do Minho, Braga.
- [24] L. Meira-Machado, J. de Una-Alvarez, C. Cadarso-Suarez, 2006, Nonparametric estimation of transition probabilities in a non-Markov illness-death model, *Lifetime Data Analysis*, 12, 325-44.
- [25] J. de Una Alvarez, L. Meira-Machado, 2015, Nonparametric estimation of transition probabilities in the non-Markov illness-death model: a comparative study, *Biometrics*, 71, 364-375.
- [26] H.C. Van Houwelingen, 2007, Dynamic prediction by landmarking in event history analysis, *Scandinavian Journal of Statistics*, 34 (1), 70-85.

- [27] G. Soutinho, L. Meira-Machado, 2020, Estimations of the transition probabilities in multi-state survival data: New developments and practical recommendations, *Wseas Transactions on Mathematics*, 19, 353-366.
- [28] H. Putter, C. Spitoni, 2018, Nonparametric estimation of transition probabilities in non-Markov multistate models:” The Landmark Aalen-Johansen estimator, *Statistical Methods in Medical Research*, 27, 2081-2092.
- [29] G. Soutinho, L. Meira-Machado, P. Oliveira, 2022, A comparison of presmoothing methods in the estimation of transition probabilities, *Communications in Statistics-Simulation and Computation*, 51 (9), 5202-5221.
- [30] G. Dikta, 1998, On semiparametric random censorship models, *Journal of Statistical Planning and Inference*, 66, 253-279.
- [31] A. Amorim, J. de Una-Alvarez, L. Meira-Machado, 2011, Presmoothing the transition probabilities in illness-death model, *Statistics and Probability Letters*, 81 (7), 797-806.
- [32] Q. Zaman, M. Iqbal, S. Din, R. Fazl-e, H. Nawaz, 2012, Proposed shrunken variance estimator for survival function, *Gomal University Journal of Research*, 28 (2), 9-26.
- [33] C.B. Borkowf, 2005, A simple hybrid variance estimator for the Kaplan-Meier survival function, *Statistics in Medicine*, 24, 827-851.
- [34] C. G. Moertel, T. R. Fleming, J. S. Macdonald, D. G. Haller, J. A. Laurie, P. J. Goodman, J. S. Ungerleider, W. A. Emerson, D. C. Tormey, J. H. Glick., M. H. Veeder, J. A. Mailliard, 1990, Levamisole and fluorouracil for adjuvant therapy of resected colon carcinoma, *New England Journal of Medicine*, 322 (6), 352–358.
- [35] E. Çiftçi, 2023, *Çok durumlu modellerde geçiş olasılıklarının tahmini*, Hacettepe Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Ankara.